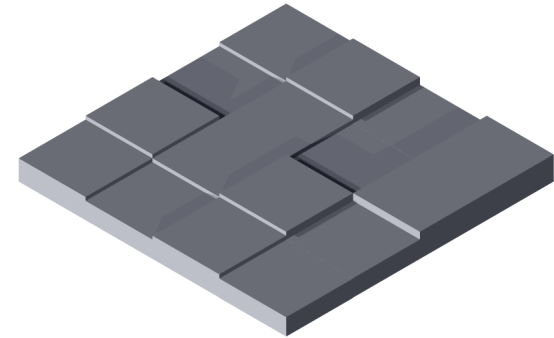
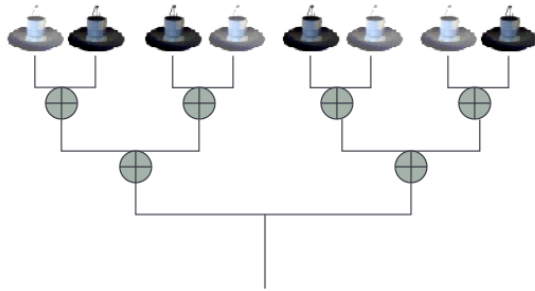
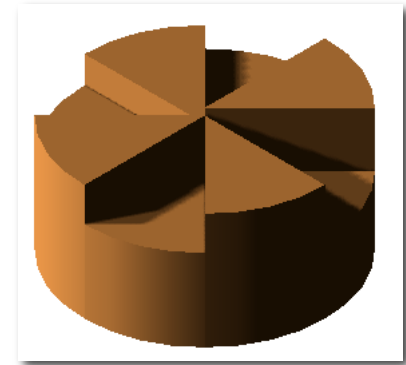


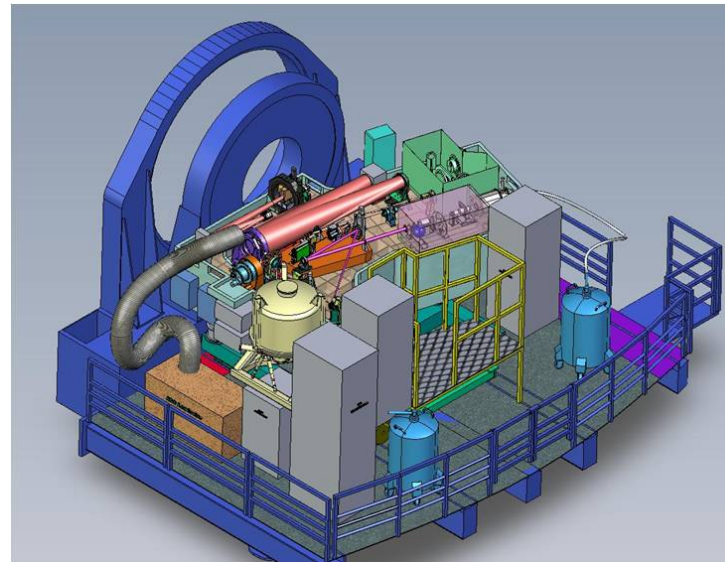
# OPTIQUE DIOPHANTINIENNE

---



# Prologue 1

La recherche, c'est souvent ça



mais c'est aussi  
*...la rencontre fortuite sur une table de dissection  
d'une machine à coudre et d'un parapluie...*

(Lautréamont, « Les chants de Maldoror » 1869)

## Prologue 2

# Détecter la vie dans l'Univers ?

« D'autres mondes, avec des plantes et d'autres êtres vivants, certains similaires et d'autres différents des nôtres, doivent exister »  
(Epicure, lettre à Hérodote, 300 Av JC)

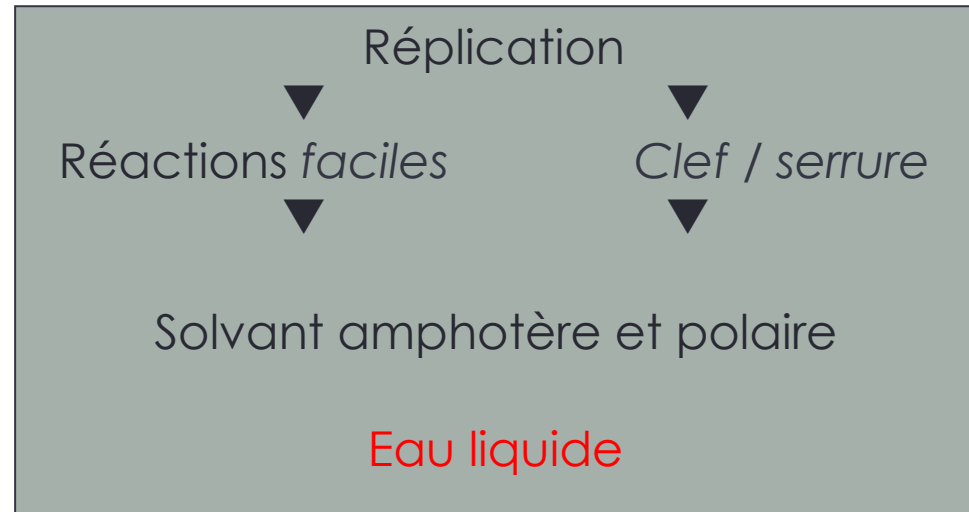
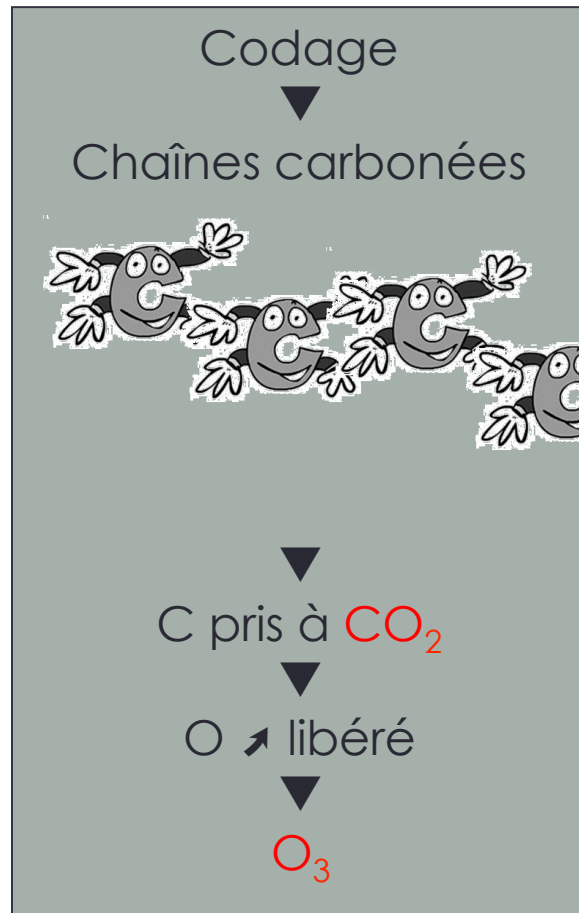
# Détecter la vie dans l'Univers ?

- Définir un critère de présence de la vie le plus fiable possible
- Détecter *directement* une planète « habitable »
- Analyser son spectre
- Confronter au critère
- C'est l'objectif double du projet DARWIN
- Un projet qui est ...
  - considéré comme réalisable
  - sera réalisé dans la première moitié du 21<sup>e</sup> siècle



# Critère de la vie ?

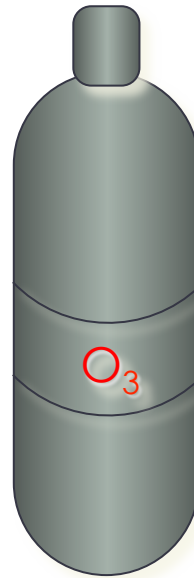
Vie = information codée ET répliquée



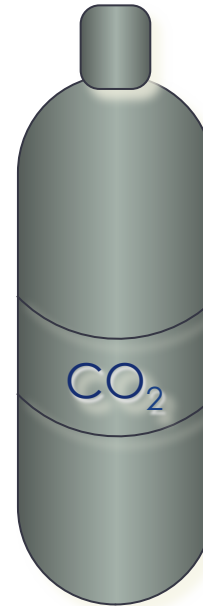
# Vie : le critère aujourd'hui



+



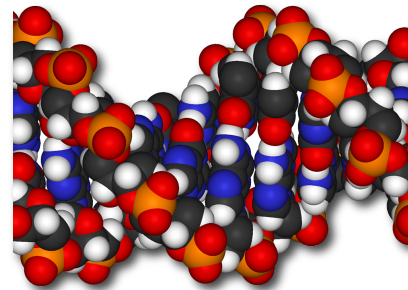
+



+



=

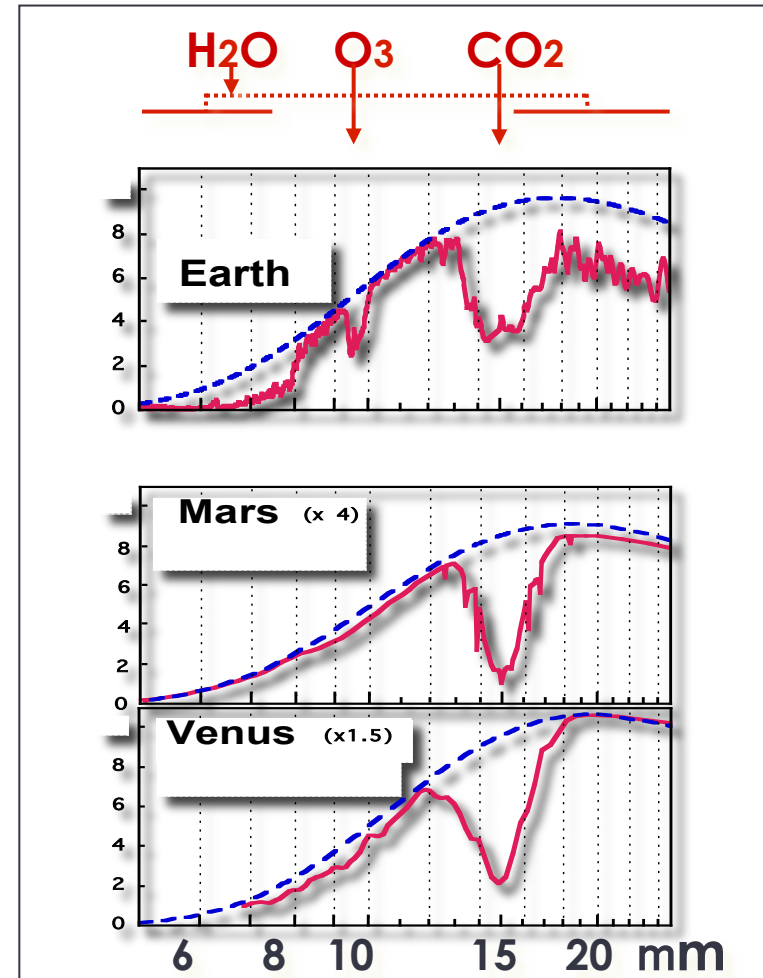


Eau liquide + Ozone ( $O_3$ ) +  $CO_2$  + Lumière

# Trois signatures infrarouges

## Spectre observé

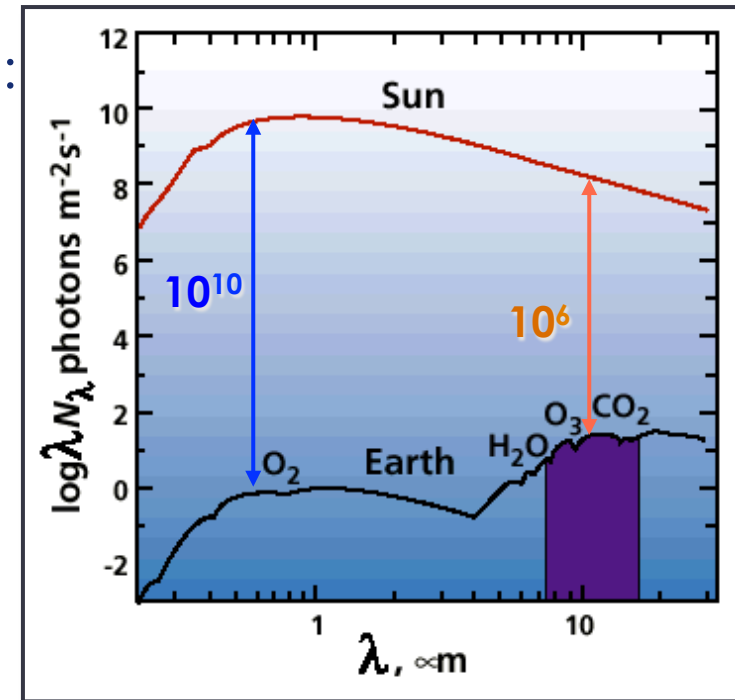
- Il existe des signatures des trois composants-clefs :  
 $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{O}_3$ ,  $\text{CO}_2$
- Des bandes larges entre 6 et 18  $\mu\text{m}$



La détection à distance de la vie est possible !

# Détecter une exoplanète

- La détection directe est très difficile :



- L'étoile est de 10 milliard (visible) à un million de fois (IR) plus brillante que la planète !
  - Et très proche angulairement d'elle (100 mas typiquement)
- Il faut éteindre l'étoile sans éteindre la planète





# Voie 1 : coronographie

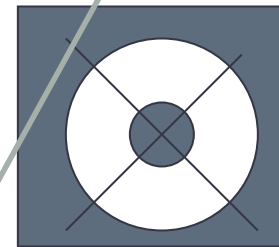
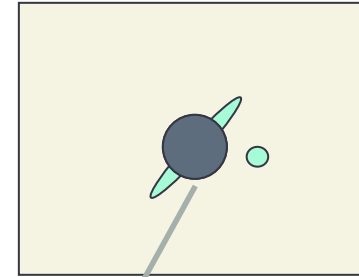
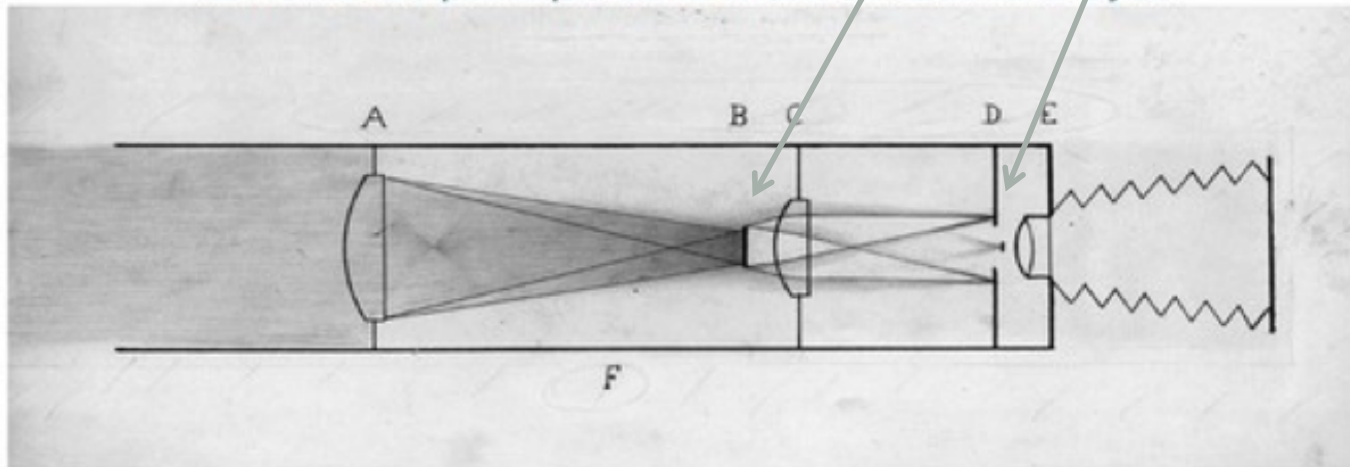
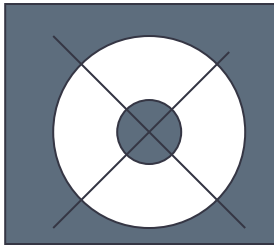
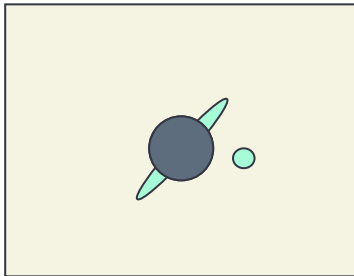


schéma de principe de la main de Bernard Lyot

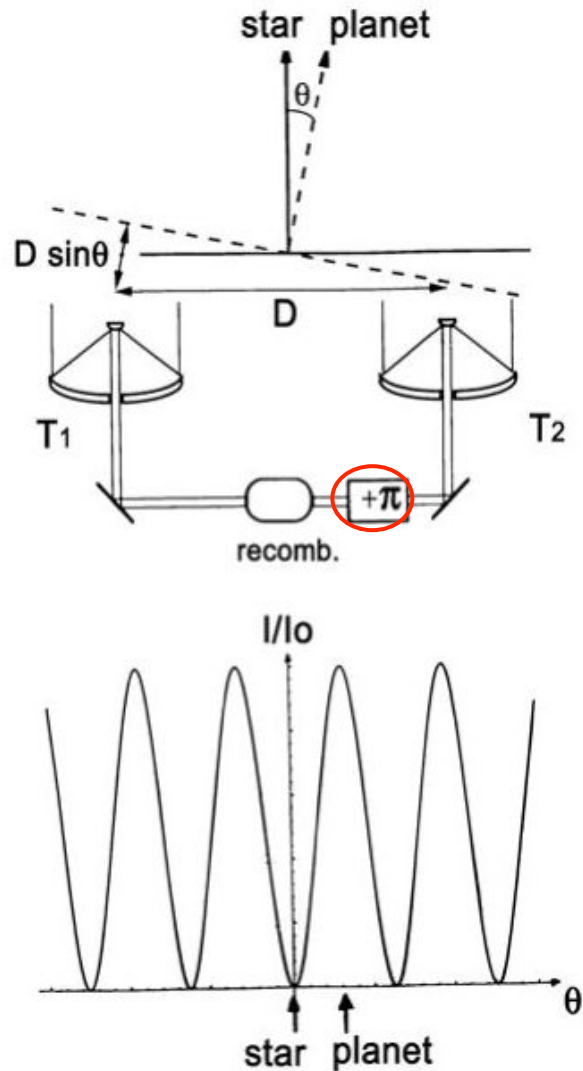


# Quelques problèmes...



- Essayer d'éteindre complètement l'étoile : **masques astucieux de phase** plutôt que d'amplitude
- Produire une **extinction achromatique** pour pouvoir analyser un spectre infrarouge

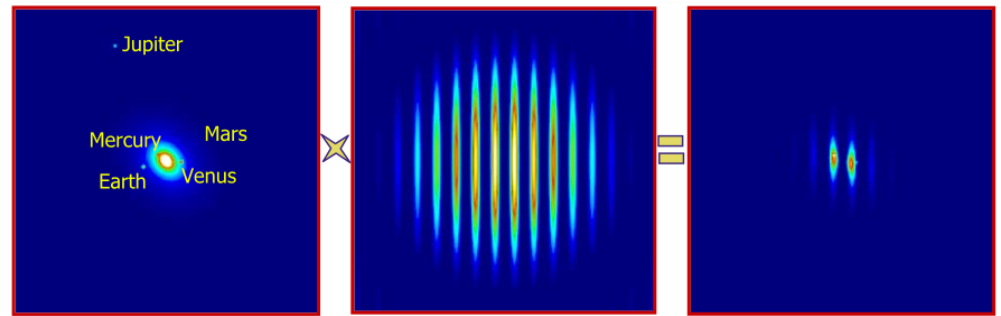
# Voie 2: interférométrie annulante



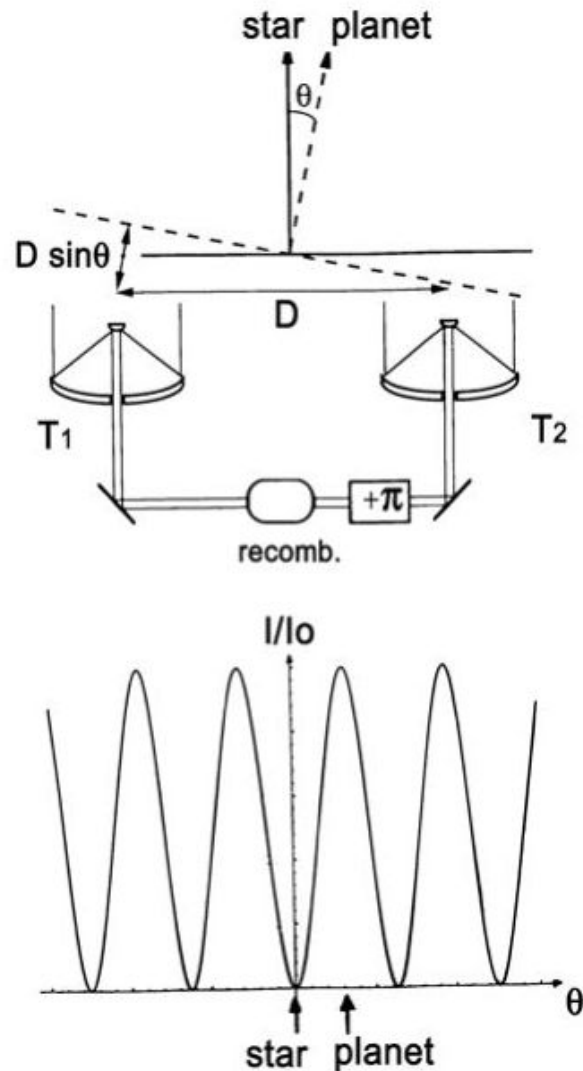
- Eteindre l'étoile sans éteindre la planète



- Interférométrie annulante (Bracewell)



# Quelques problèmes...



- Le problème des **lignes à retard** dans l'espace : les **éviter**
- Le problème des *fuites* de lumière de l'étoile : obtenir une **annulation profonde**
- Le problème du **déphasage achromatique** pour pouvoir analyser *tout* le spectre infrarouge

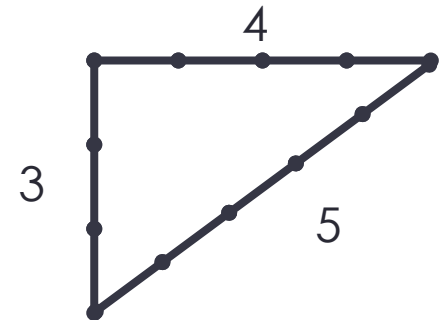
# L' OPTIQUE DIOPHANTINIENNE

---

pourrait apporter des réponses originales à toutes ces questions...

# Optique diophantienne

- Diophante d'Alexandrie : mathématicien de l'antiquité (~210 – 290 après J.C.), contemporain d'Euclide.
- Il s'est intéressé aux **équations polynomiales à coefficients entiers qui ont pour solutions des nombres entiers**. Ces équations sont dites diophantiennes.
- Par exemple :
  - $x^2 - 3x + 2 = 0$ , qui s'écrit également  $(x-1)(x-2) = 0$  ; solution :  $x_1=1$  et  $x_2=2$
  - $x^2 + y^2 = z^2$  qui admet, entre autres, la solution  $x=3, y=4, z=5$  : le **triangle égyptien**
  - L'équation diophantienne  $x^n + y^n = z^n$  n'admet pas de solutions pour  $n > 2$  : c'est le fameux *dernier théorème de Fermat*, démontré par Wiles en 2005.



# Le problème de Prouhet-Tarry-Escott

- Énoncé du problème : peut-on trouver 2 ensembles d'entiers  $\{a_1, \dots, a_n\}$  et  $\{b_1, \dots, b_p\}$  tels que  $a_1^m + \dots + a_n^m = b_1^m + \dots + b_p^m$  pour  $m = 1, \dots, k$  ?  
En abrégé, le problème est noté :  $\{a_i\}_{i=1}^n =^k \{b_j\}_{j=1}^p$  et les solutions sont appelées **multigrades**
- Le problème possède bien des solutions :  
Euler et Goldbach montrent en 1750 que  $\{a, b, c, a+b+c\} =^2 \{a+b, b+c, c+a\}$
- Exemple d'égalités diophantiennes de multigrades :  
 $1 + 4 + 6 + 7 = 2 + 3 + 5 + 8$   
 $1^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2$

# Optique diophantienne

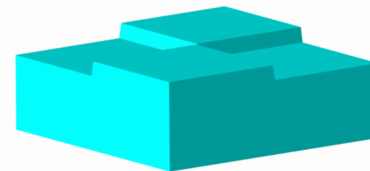
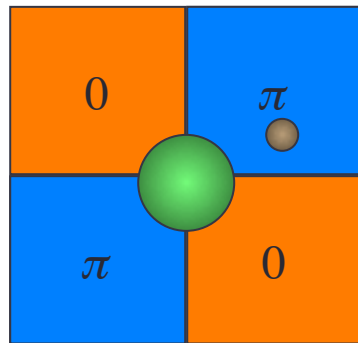
- **Optique physique & entiers naturels** : phénomènes d'interférences font intervenir des configurations discrètes de télescopes, des différences de marche multiples entiers pairs ou impairs de la demi-longueur d'onde
- **Amplitude complexe** : fonction fortement non-linéaire de la différence de marche optique → développement de Taylor implique des puissances d'entiers
- **L'optique diophantienne** : c'est l'exploitation en optique physique (celle des interférences) de relations algébriques remarquables entre les puissances de nombres entiers.



# **1 - OPTIQUE DIOPHANTINNE ET ACHROMATISATION DE CORONOGRAPHE**

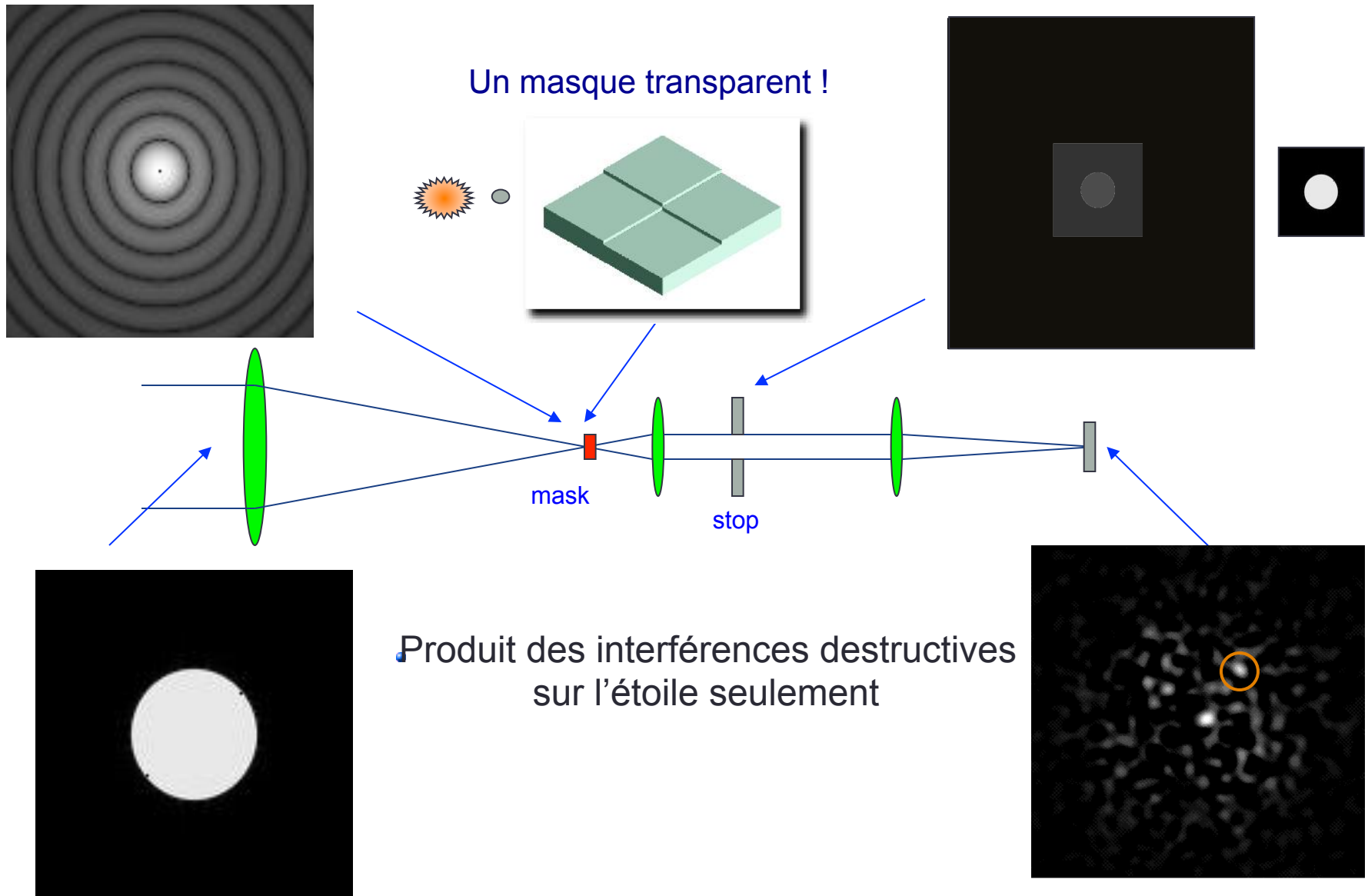
# Masque de phase 4 quadrants

- **Coronographie** mono-télescope
- Le coronographe à masque de phase à 4 quadrants
- Une simple lame transparente avec 2 marches d'épaisseur  $\lambda_0/2 / (n-1)$  produisant un déphasage de  $\pi$



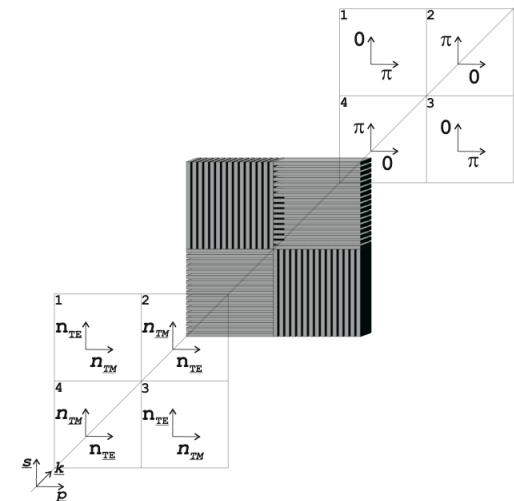
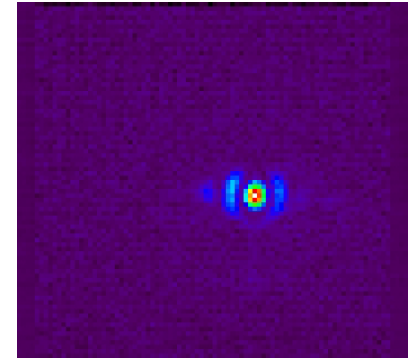
- On place l'étoile exactement au centre
- Produit des interférences destructives entre les 4 amplitudes issues des 4 quadrants :  $1 + e^{j\pi} + 1 + e^{j\pi} = 0$

# Masque de Phase 4 Quadrants



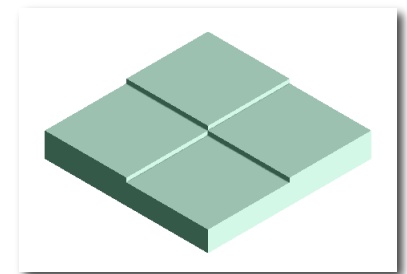
# Le 4QPMC aujourd' hui

- 4QPM classique (NACO, MIRI/JWST):
  - Atténuation du pic :  $1.2 \cdot 10^5$
  - Contraste :  $10^6$  à  $3 \lambda/D$
  - Mais il est chromatique : contraste diminue quand  $\lambda \neq \lambda_0$
- **Achromatisation** nécessaire pour :
  - Gain en flux ( $m_v > 24$  !)
  - Imagerie différentielle (SPHERE)
- Plusieurs voies explorées :
  - Polarisation : lames 1/2 ondes, ZOG
  - 4QPM triple passage (Baudoz, Galicher) :  $10^{-8}$
  - Optique diophantienne ...



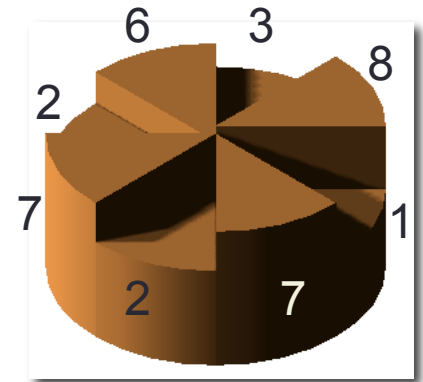
# Achromatisation diophantienne

- Le problème :  $a = e^{j\pi}$  que quand  $\lambda = \lambda_0$
- Solution : jouer sur des combinaisons d'épaisseurs autres que  $[0, 1, 0, 1]$  pour annuler les 1<sup>ers</sup> termes du développement limité de l'amplitude complexe en fonction de  $\delta\lambda = \lambda - \lambda_0$   
 $a = \sum \exp[j k_i (\pi + \varepsilon)]$  avec  $\varepsilon = \pi \delta\lambda / \lambda$
- $a = (-1)^{k_0} (1 + j k_0 \varepsilon - k_0^2 \varepsilon^2 / 2 + \dots) + (-1)^{k_1} (1 + j k_1 \varepsilon - k_1^2 \varepsilon^2 / 2 + \dots)$
- E.g.  $k_0 = 0$ ,  $k_1$  et  $k_3$  impairs,  $k_2$  pair  
 $a = 1 - [1 + j k_1 \varepsilon - k_1^2 \varepsilon^2 / 2] + [1 + j k_2 \varepsilon - k_2^2 \varepsilon^2 / 2] - [1 + j k_3 \varepsilon - k_1^2 \varepsilon^2 / 2]$   
 1<sup>er</sup> ordre annulé :  $-k_1 + k_2 - k_3 = 0$   
 solution ?
- Solution : épaisseurs =  $[0, 1, 2, 1]$
- Mais pas possible d'annuler le 2<sup>e</sup> ordre



# Achromatisation *diophantienne*

- Il faut passer au 8-octants
- 3<sup>e</sup> ordre avec marches = [1, 8, 3, 6, 2, 7, 2, 7]



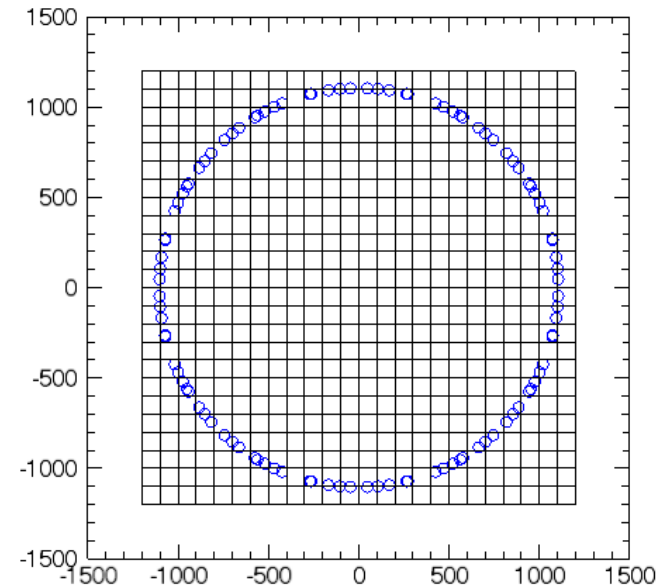
# 2- OPTIQUE DIOPHANTINNE ET LIGNE À RETARD

---

AVEC LA COMPLICITÉ DE DIDIER PELAT

# Triplets de pythagore

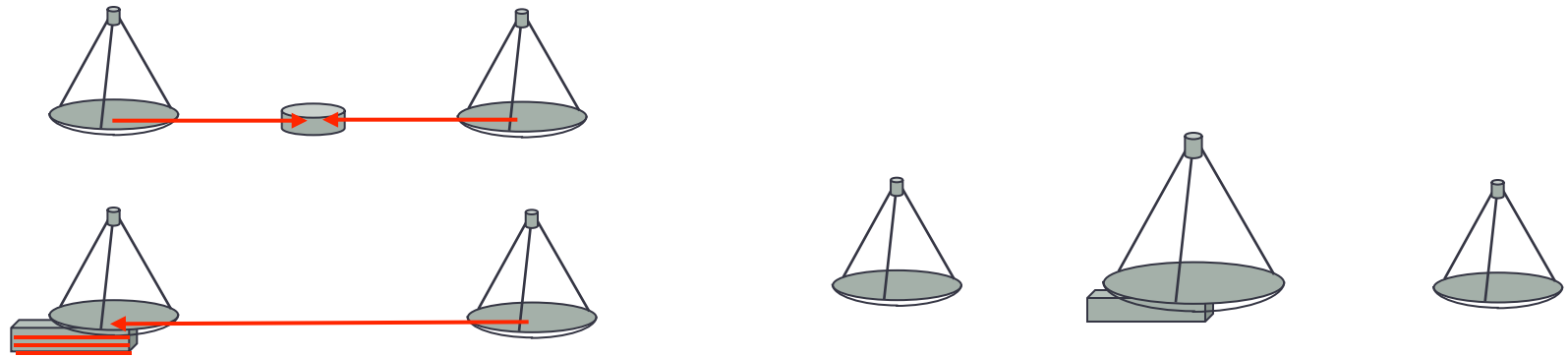
- Il y a une infinité de triplets d'entiers  $[a,b,c]$  solution de l'équation de pythagore  $a^2 + b^2 = c^2$
- Certaines valeurs d'hypoténuse ( $c$ ) donnent lieu à plusieurs solutions:
  - $c = 1105 \rightarrow 13$  solutions
  - $c = 1022125 \rightarrow 94$  couples  $(a,b)$
- Plus besoin de compas, il suffit d'une feuille graduée...



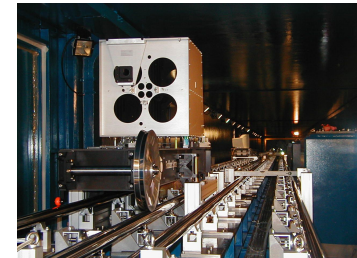


# Ligne à retard

- Pour faire interférer les faisceaux issus de plusieurs télescopes, il faut que les chemins optiques soient quasi-identiques
- Dans l'espace pour économiser les véhicules, on cherche à associer la station de recombinaison et l'un des télescopes

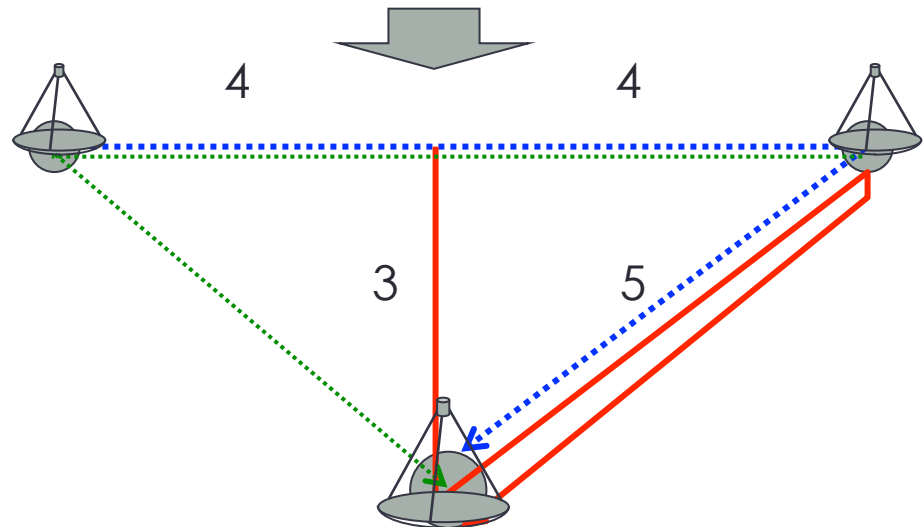


- Une ligne à retard s'impose alors
- Une grande ligne à retard comme celle du VLTi n'est pas concevable
- Une solution : utiliser un transfert de faisceaux entre les différents véhicules spatiaux ?



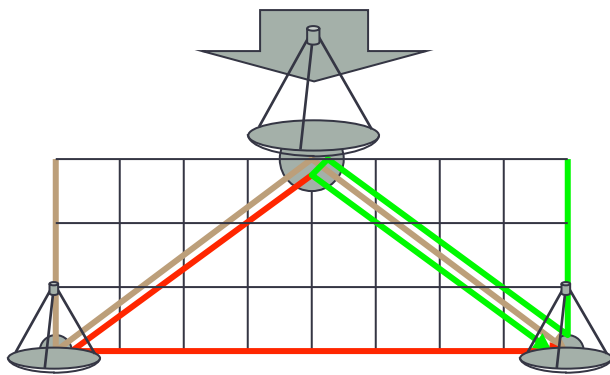
# La solution *Imothep*

- Peut-on trouver une solution où les deux conditions sont remplies : a) pas de lignes à retard ; b) recombinaison sur l'une des plateformes de télescope ?
- Oui avec 3 télescopes non-alignés, si les faisceaux peuvent voyager d'une plateforme à l'autre (miroirs)
- Avec un triangle égyptien (3,4,5): les trajets optiques des faisceaux rouges, bleus et vert sont bien identiques  
 $4+4+5 = 3+5+5 = 13$ .

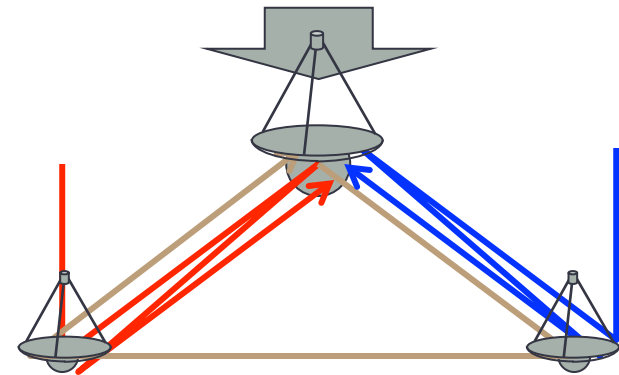


# Plusieurs solutions diophantiennes

- D'autres solutions tout aussi valides, et où la recombinaison peut se faire sur l'une des stations latérales :



Trajet optique = 13



Trajet optique = 18

- Une des options de la proposition PEGASE proposée au CNES

# 3- OPTIQUE DIOPHANTINNE ET CONFIGURATIONS SUPER- ANNULANTES

---

# La suite de Prouhet-Thué-Morse

- Tout commence avec la page mathématique dans *Pour la Science...*
- La suite de **Prouhet-Thué-Morse**
- Réplication  $\rightarrow$  Inversion  $\rightarrow$  Concaténation

+

+ -

+ - - +

+ - - + - + + -

+ - - + - + + - - + + - + - - +

$2^L$  termes

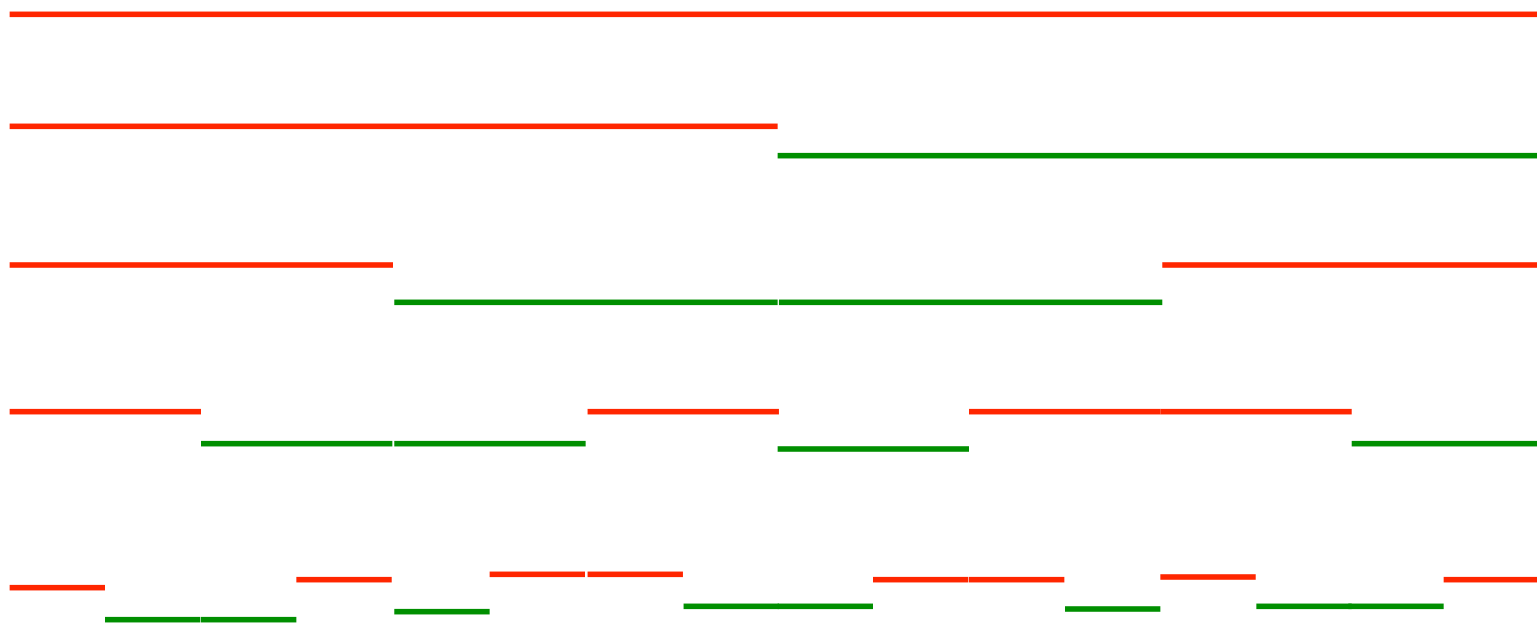


# La suite de Prouhet-Thué-Morse

Autre règle de construction :

Segment « haut » coupé en 2 segments « haut – bas »

Segment « bas » coupé en 2 segments « bas – haut »



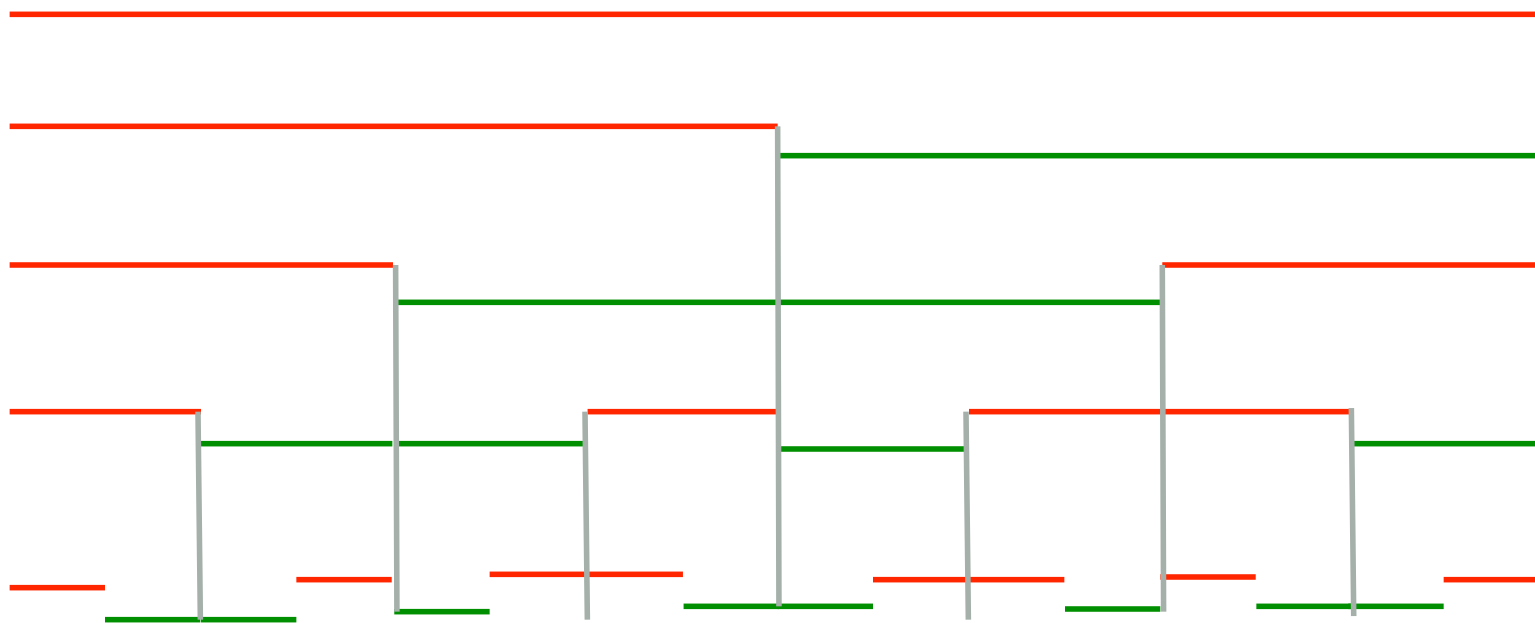
*Vous avez dit fractale ?*

# La suite de Prouhet-Thué-Morse

Autre règle de construction :

Segment « haut » coupé en 2 segments « haut – bas »

Segment « bas » coupé en 2 segments « bas – haut »



*Vous avez dit fractale ?*

# La propriété de Prouhet

Associons les  $2^L$  premiers nombres entiers à la suite de P-T-M  
et partitionnons ces nombres en deux  
sous-ensembles, suivant la « parité de Prouhet »

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

+ - - + - + + - - + + - + - - +

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

Sous-ensemble {A} : 1, 4, 6, 7, 10, 11, 13, 16

Sous-ensemble {B} : 2, 3, 5, 8, 9, 12, 14, 15

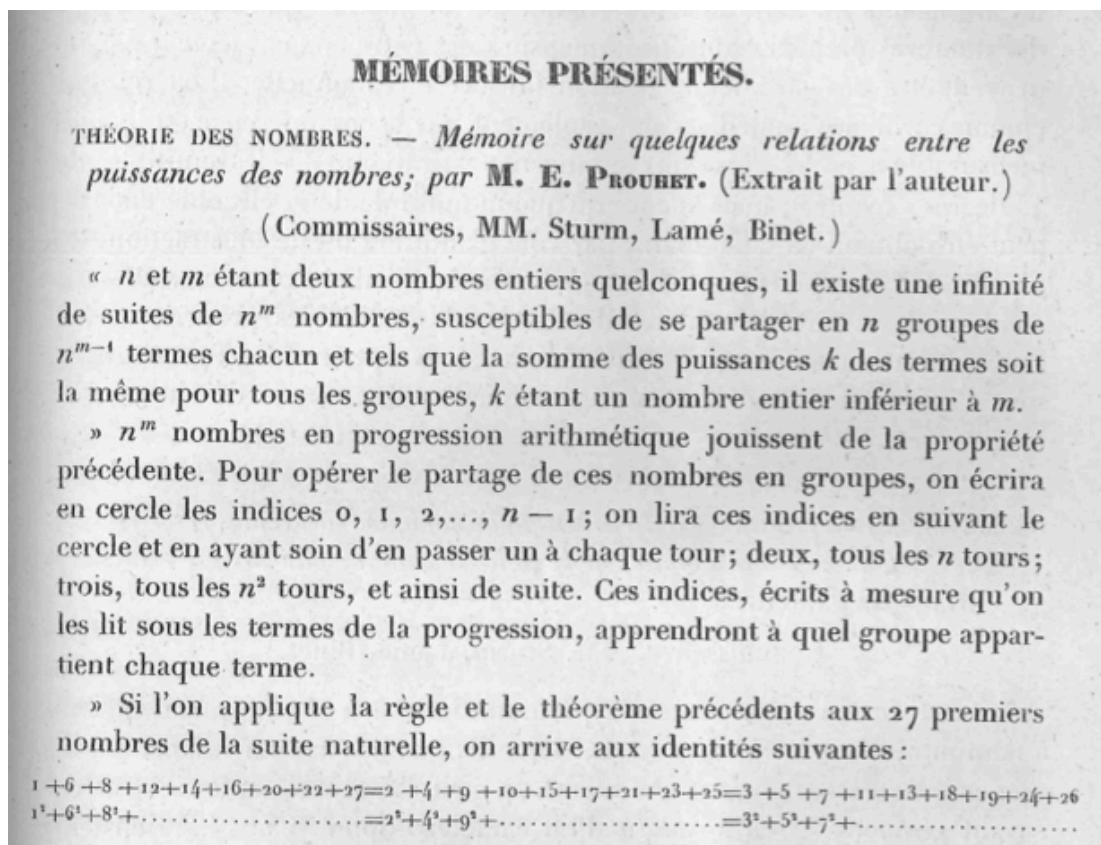


# La propriété de Prouhet

Une **propriété remarquable** : les sommes des éléments des deux séries sont identiques, *mais aussi les sommes des carrés, des cubes, etc.*,

jusqu'à  $\sum n_k^{L-1} \rightarrow \{A\} =^{L-1} \{B\}$  multigrades

E. Prouhet CR Académie de Sciences, 1851



# La propriété de Prouhet

1, 2, 3, 4, 5 ...  $2^L$        $\sum n_k^i = \sum m_k^i$       pour tout  $i < L-1$   
 e.g. 1 à 16,  $L = 4$  : vrai jusqu'aux cubes

Exemple :  $L=4$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16

$$1+4+6+7+10+11+13+16 = 2+3+5+8+9+12+14+15$$

$$1^2+4^2+6^2+7^2+10^2+11^2+13^2+16^2 = 2^2+3^2+5^2+8^2+9^2+12^2+14^2+15^2$$

$$1^3+4^3+6^3+7^3+10^3+11^3+13^3+16^3 = 2^3+3^3+5^3+8^3+9^3+12^3+14^3+15^3$$

# Généralisation propriété de Prouhet

On sépare les  $n^L$  premiers entiers en  $n$  ensembles suivant la suite du terme  $L$

|       | a | b | c | b | c | a | c | a | b |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $E_a$ | 1 |   |   |   |   | 6 |   | 8 |   |
| $E_b$ |   | 2 |   | 4 |   |   |   |   | 9 |
| $E_c$ |   |   | 3 |   | 5 |   | 7 |   |   |

La **propriété remarquable existe toujours** sur les sommes des carrés, des cubes, etc., jusqu'à  $\sum n_k^{L-1}$

$$1, 2, 3 \dots n^L \quad \sum n_k^i = \sum m_k^i = \sum l_k^i = \dots \quad \forall i < L-1$$

soit jusqu'à  $\sum n_k^{L-1} = \sum m_k^{L-1}$

Exemple :  $n=3, L=3$

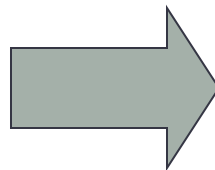
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ..., 25, 26, 27

$$1+6+8+\dots+26 = 2+4+9+\dots+27 = 3+5+7+\dots+25 = 126$$

$$1^2+6^2+8^2+\dots+26^2 = 2^2+4^2+9^2+\dots+27^2 = 3^2+5^2+7^2+\dots+25^2 = 2310$$

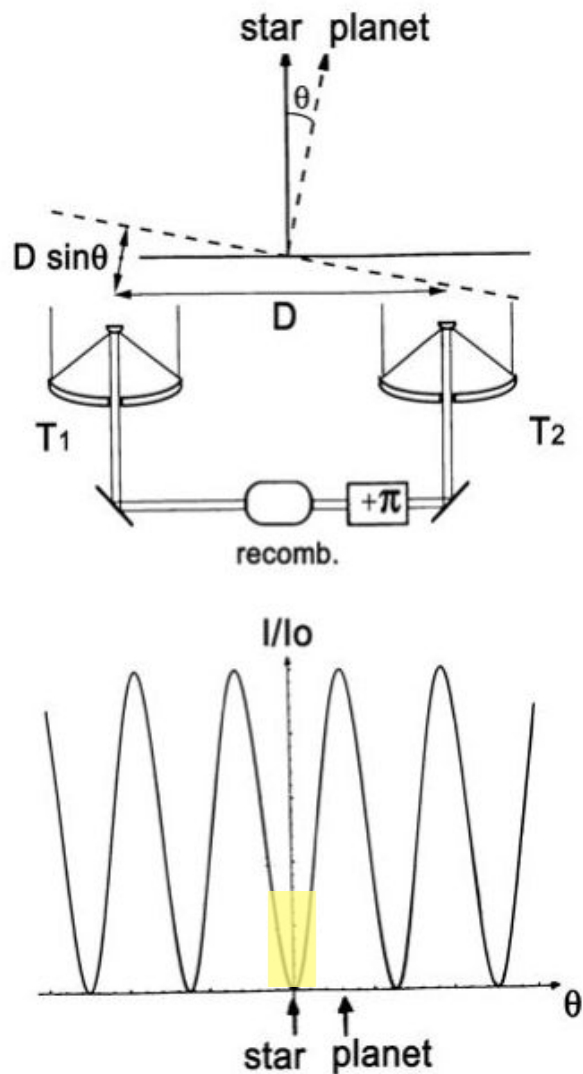
# Applications ?

- Couper un saucisson en tranches, de façon la plus égale entre deux (N) convives



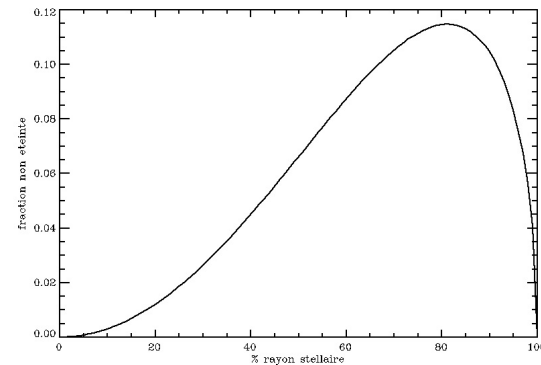
- Observation infrarouge chopping / nodding :
  - ABBA → ABBA BAAB BAAB ABBA ...
- Améliorer la performance des détections synchrones
- Concevoir des interféromètres super-nulleurs ...

# Nulling profond...



- Le problème du *nulling* profond : éviter les *fuites* de lumière de l'étoile qui est résolue
- Avec deux télescopes :  

$$\tau = 1 - \cos(2\pi D \theta / \lambda) \approx \theta^2$$
 [brillance disque stellaire]  $\times \tau$



Exemple :

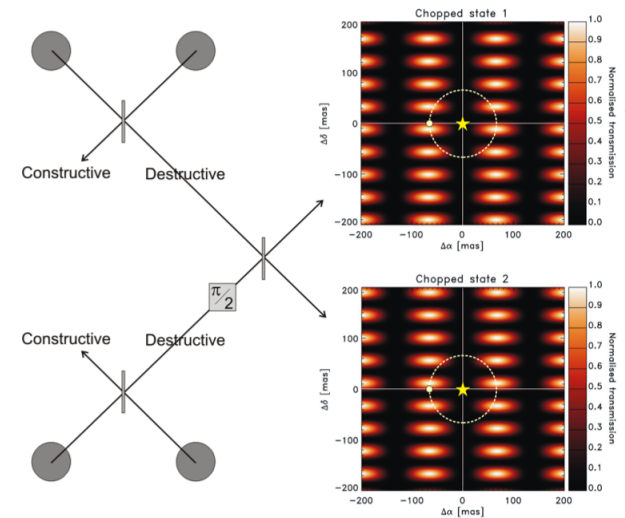
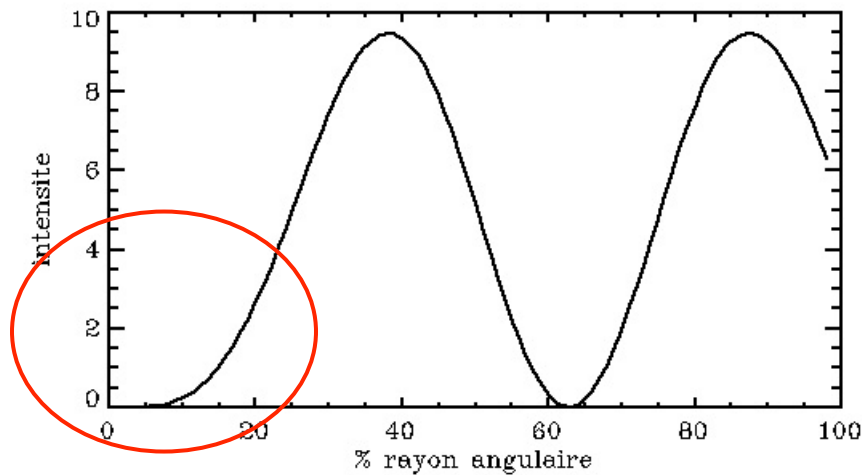
1 étoile à 10 pc ,  $\theta = 5 \cdot 10^{-4}$  "

base = 120m (VLTI) à  $\lambda = 2.4\mu\text{m}$

$\tau = 0.15$  au bord et  $t = 7.5\%$  au total :  
 on n'a atténué l'étoile que d'un facteur 13

# Avec $N > 2$ télescopes

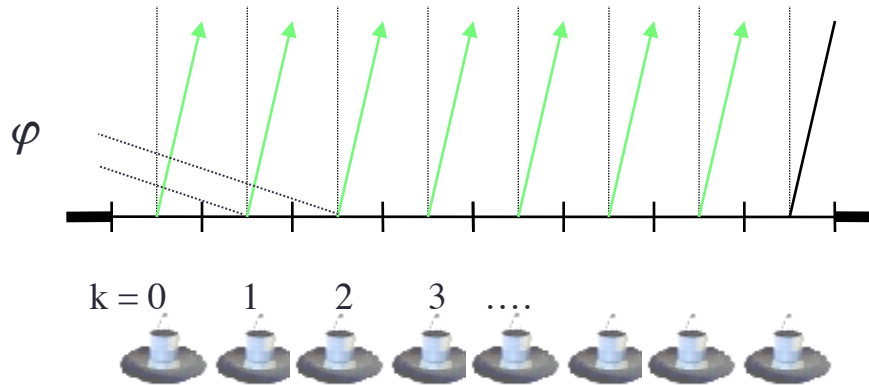
- On peut améliorer le taux de réjection
- Exemple : 4 télescopes alignés : + - - +
- $\tau \sim \theta^4$
- On cherche :  $\tau \approx \theta^{k > 4}$
- Quel  $k$  peut-on atteindre ?



# Réseaux 1-D Prouhet

Combinaison interférométrique de N télescopes

Amplitude :



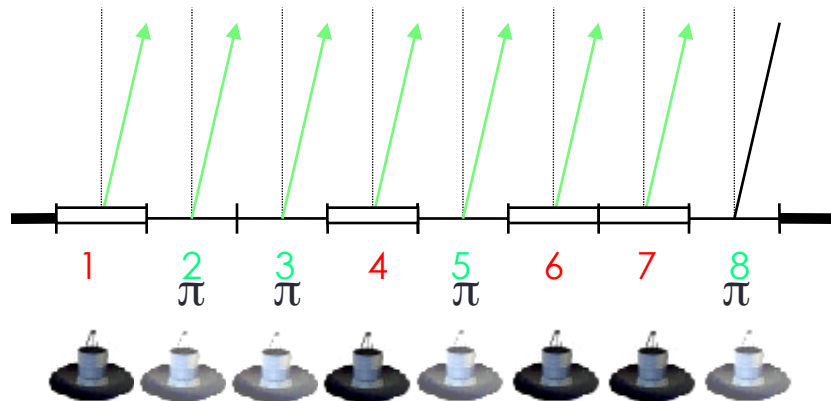
$$a = \sum_k a_0 e^{jk\varphi}$$

$$a = \sum_k (1 + jk\varphi - k^2\varphi^2/2 - jk^3\varphi^3/6 + \dots)$$

$$a = \sum_k 1 + j\varphi \sum_k k - \varphi^2/2 \sum_k k^2 - j\varphi^3/6 \sum_k k^3 + \dots$$

$$a = \sum_k 1 + j\varphi \sum_k (m_k + n_k) - \varphi^2/2 \sum_k (m_k^2 + n_k^2) - j\varphi^3/6 \sum_k (m_k^3 + n_k^3) + \dots$$

Introduisons une phase  $\pi$  sur les télescopes "-" de la série de PTM :



$$a = j\varphi \sum_k (m_k - n_k) - \varphi^2/2 \sum_k (m_k^2 - n_k^2) - j\varphi^3/6 \sum_k (m_k^3 - n_k^3) + \dots$$

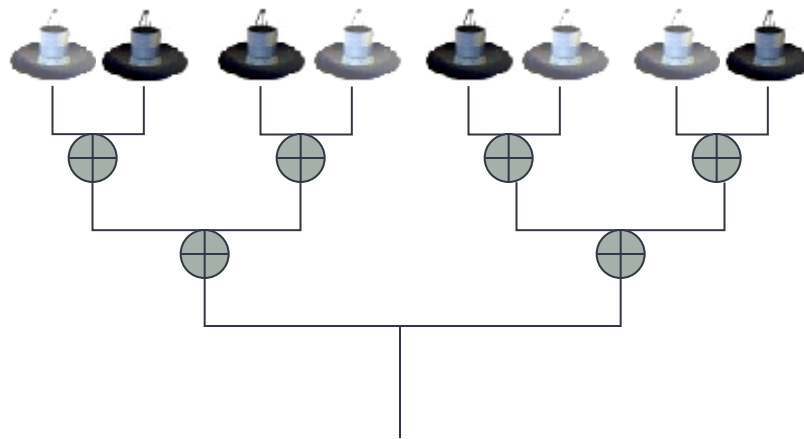
= 0 (multigrades)

Amplitude :  $a \propto \varphi^L \propto \theta^L$   
 Intensité :  $I \propto \varphi^{2L} \propto \theta^{2L}$



# Pourquoi cette propriété ?

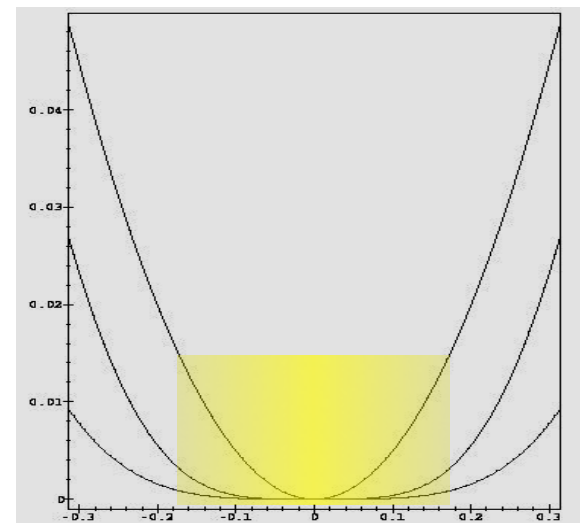
- En fait, à chaque étage on recombine de façon *annulante* des interféromètres eux-mêmes *annuleurs*



- On comprend alors l'effet exponentiel

# L'auge annulante se creuse

- Conséquence : l'interférence est fortement destructive autour de la ligne de visée sur un grand angle (dépendance en  $\theta^{2L}$ )
- **Avantage : moins de fuites du disque stellaire !**
- Question : où va la lumière ?
- Réponse : dans les pics secondaires, d'autant plus loin que L est grand

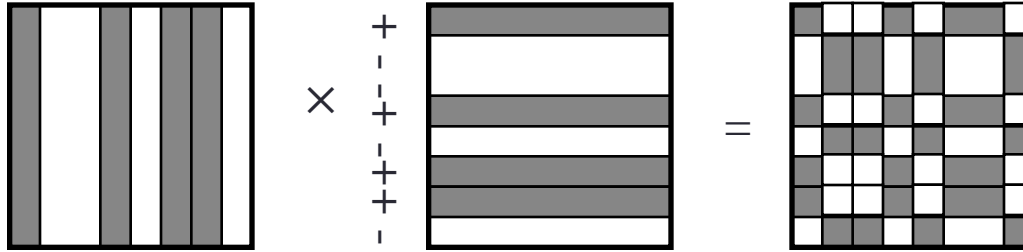


# Une algèbre des interféromètres

- A partir de ce réseau 1D à *la Prouhet*, on peut définir plusieurs familles d'autres réseaux interférométriques annulants :
  - réseaux 2D de télescopes identiques
  - Réseaux 1D et 2D de télescopes de différentes tailles
  - Réseaux de télescopes à déphasage  $\neq \pi$

# Réseaux 2-D

+ - -+ -++ -

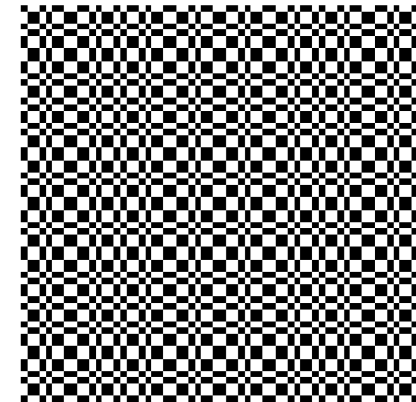


Croix d'Angel

$\theta^4$



$\theta^8$



$\theta^{24}$  !!

# La propriété de Prouhet est conservée

- On montre que le terme général du développement en série s'écrit:

$$|\sum_{k,k' \in \mathcal{E}^*} - \sum_{k,k' \in \mathcal{O}^*}| (ku + k'v)^n = |\sum_{k,k' \in \mathcal{E}^*} - \sum_{k,k' \in \mathcal{O}^*}| \{k^n + (ku)^{n-1}(k'v) + (ku)^{n-2}(k'v)^2 + \dots + (ku)^{n-m}(k'v)^m + \dots\}$$

- Il est nul pour toute valeur de  $m, m' < L$
- $a \propto \varphi^{2L}$   $I \propto \varphi^{4L}$
- Exemple :  $L = 3 \Rightarrow I \propto \varphi^{12}$

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| + | - | - | + | - | + | + | - |
| - | + | + | - | + | - | - | + |
| - | + | + | - | + | - | - | + |
| + | - | - | + | - | + | + | - |
| - | + | + | - | + | - | - | + |
| + | - | - | + | - | + | + | - |
| + | - | - | + | - | + | + | - |
| - | + | + | - | + | - | - | + |

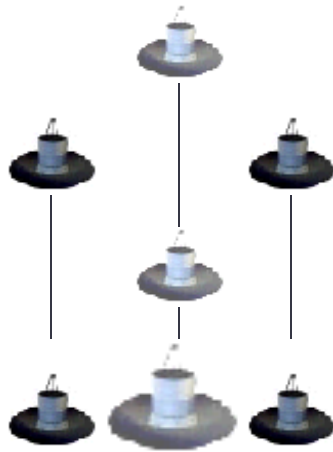
# Généralisation des réseaux 1D

- Un *cisaillement* de  $n$  pas est appliqué à un réseau 2-D
- Le réseau est projeté sur une direction en sommant les surface des télescopes algébriquement
- Exemple :  $n=2$

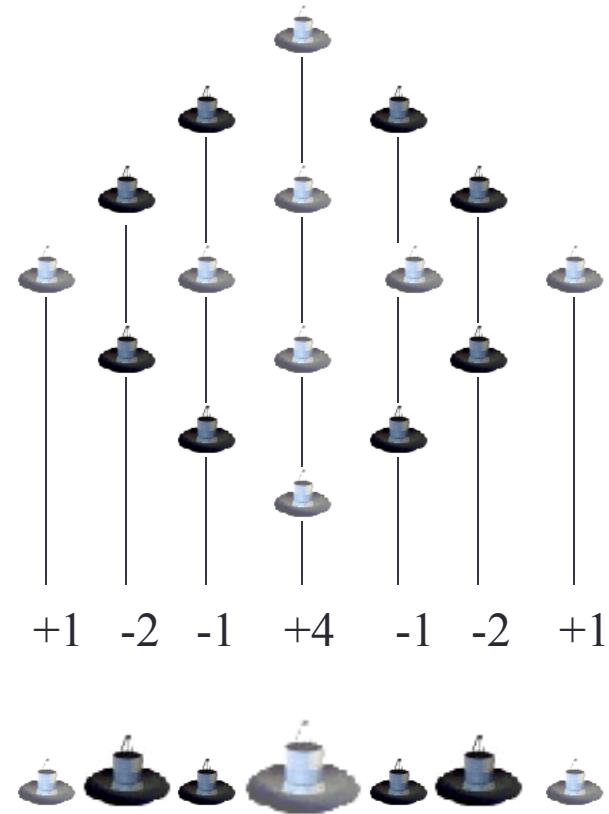
|    |    |    |    |   |   |    |    |    |    |
|----|----|----|----|---|---|----|----|----|----|
| +  | -  | -  | +  |   |   |    |    |    |    |
|    |    | -  | +  | + | - |    |    |    |    |
|    |    |    |    | - | + | +  | -  |    |    |
|    |    |    |    |   |   | +  | -  | -  | +  |
| +1 | -1 | -2 | +2 | 0 | 0 | +2 | -2 | -1 | +1 |



# Exemples



Croix d'Angel dégénérée



# Généralisation à 2D

- Un couple de réseaux 1D permet de créer un réseau 2D
  - Réplication 1D
  - multiplication algébrique par le réseau colonne

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
|    | +1 | -2 | +1 |
| -1 | -1 | +2 | -1 |
| +2 | +2 | -4 | +2 |
| -2 | -2 | +4 | -2 |
| +1 | +1 | -2 | +1 |



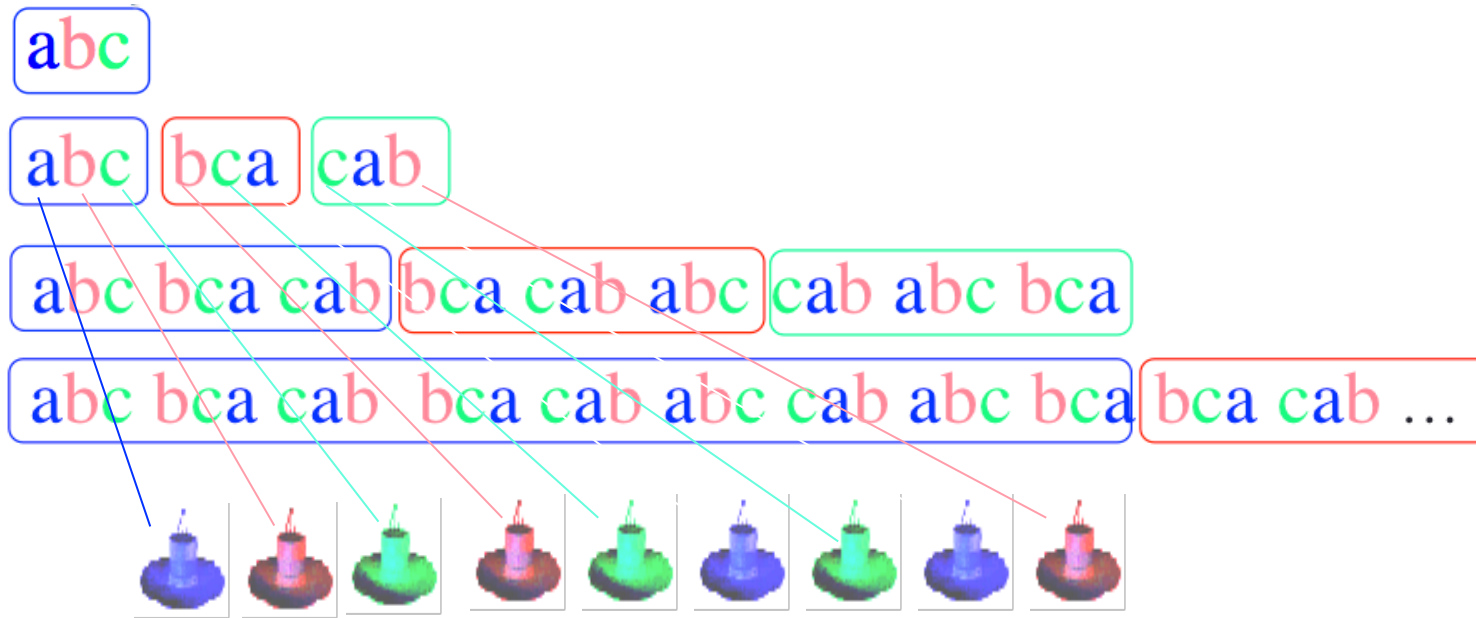


# Généralisation des réseaux 1D

- Peut-on obtenir un réseau nulleur d'un nombre  $N_{\text{tel}}$  arbitraire de télescopes, à 1D ?
- Réponse : OUI
- On part d'un réseau  $2^M \times 2^N$  et on applique un cisaillement de  $n$ , alors le nombre de télescopes est  $N_{\text{tel}} = 2^M + (2^N - 1) n$
- Il existe toujours une combinaison  $M, N, n$  qui permet d'avoir un  $N_{\text{tel}}$  quelconque

# Généralisation à $\Delta\phi \neq \pi$

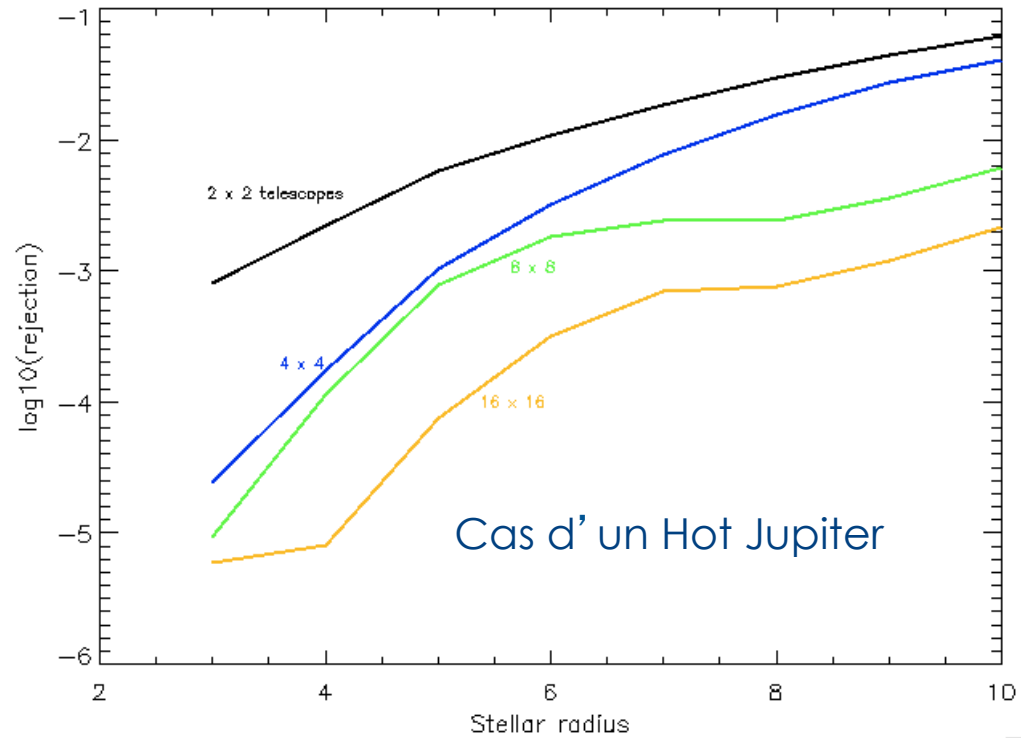
- On part d'une séquence de  $n$  termes: a,b,c..
- Réplication, permutation, concaténation



- nombre de télescopes :  $n^L$
- $\Delta\phi = 0$  sur les télescopes " $a$ ",  $2\pi/n$  sur les " $b$ ",  $4\pi/n$  sur les " $c$ ", etc.
- *nulling* toujours en  $\theta^{2L}$

# Efficace ?

- En termes de réjection de la lumière de l'étoile, oui



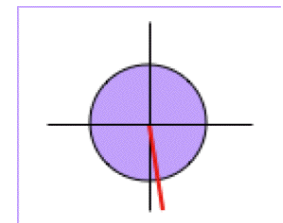
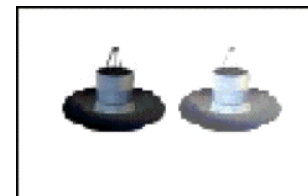
- Plus robuste aux imperfections de l'interféromètre

# Hypothèses / comparaison

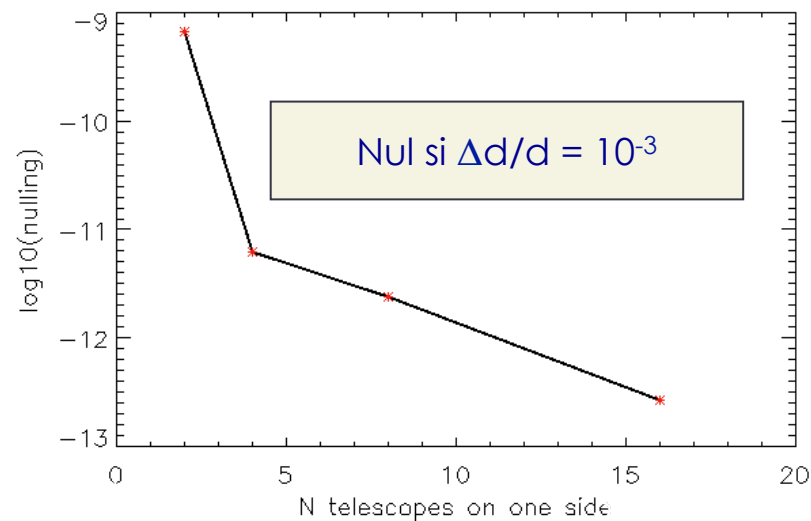
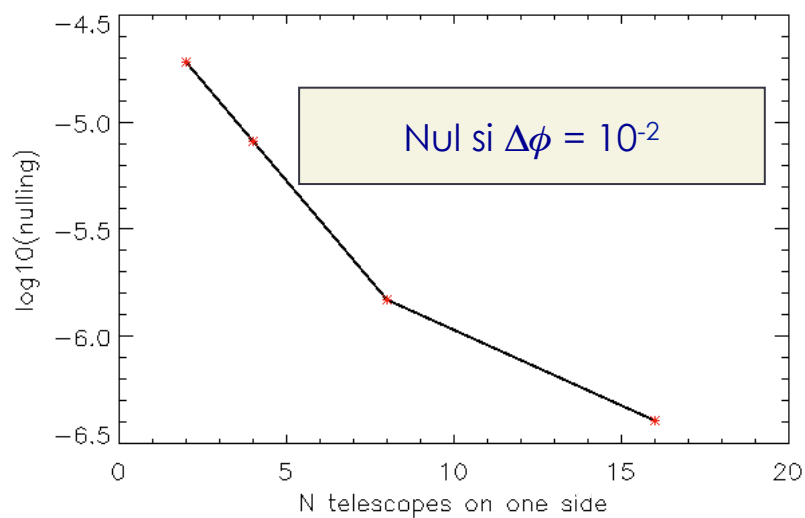
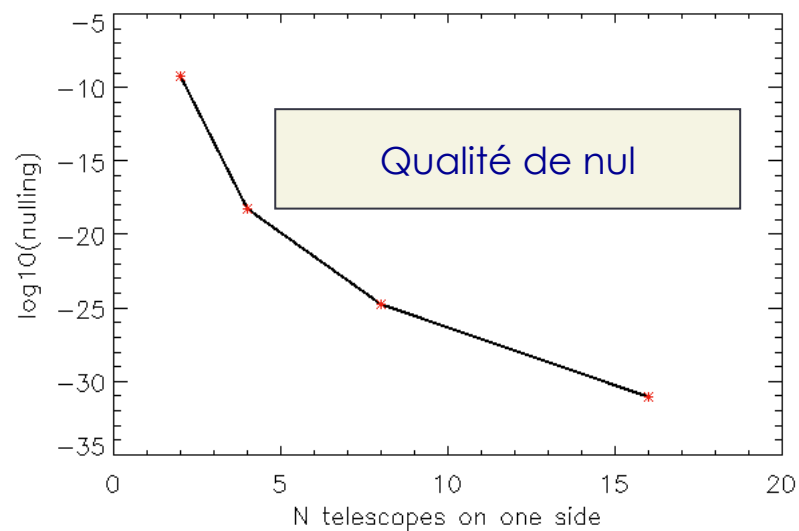
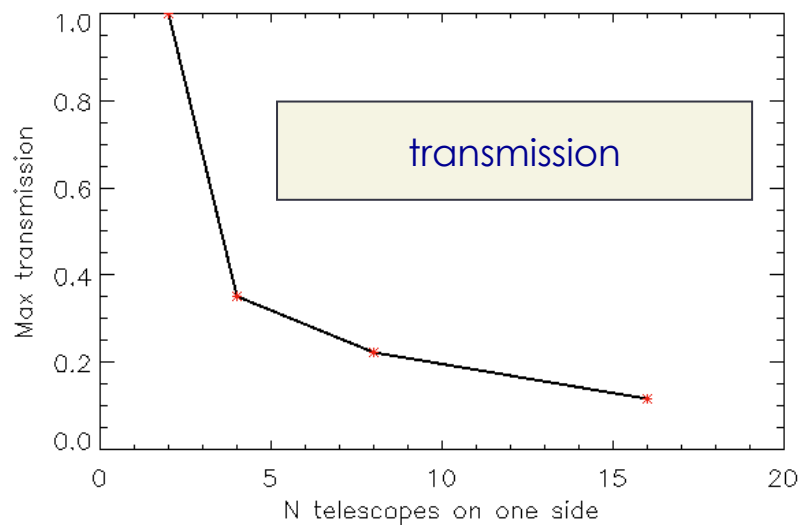
- Test sur flottille 2D carrée:
  - 16x16, 8x8, 4x4, 2x2
- Surface totale de télescope identique
  - Quelques grands télescopes ou beaucoup de petits
  - Coût ?
- Simulation d'un système Terre-Soleil :
  - Ligne de base = maximum de transmission à 1 AU
- 2 types d'erreurs considérées :
  - Distance entre télescopes variée :  
 $\Delta d/d = 10^{-3}$
  - $\pi \pm 10^{-2}$  radians



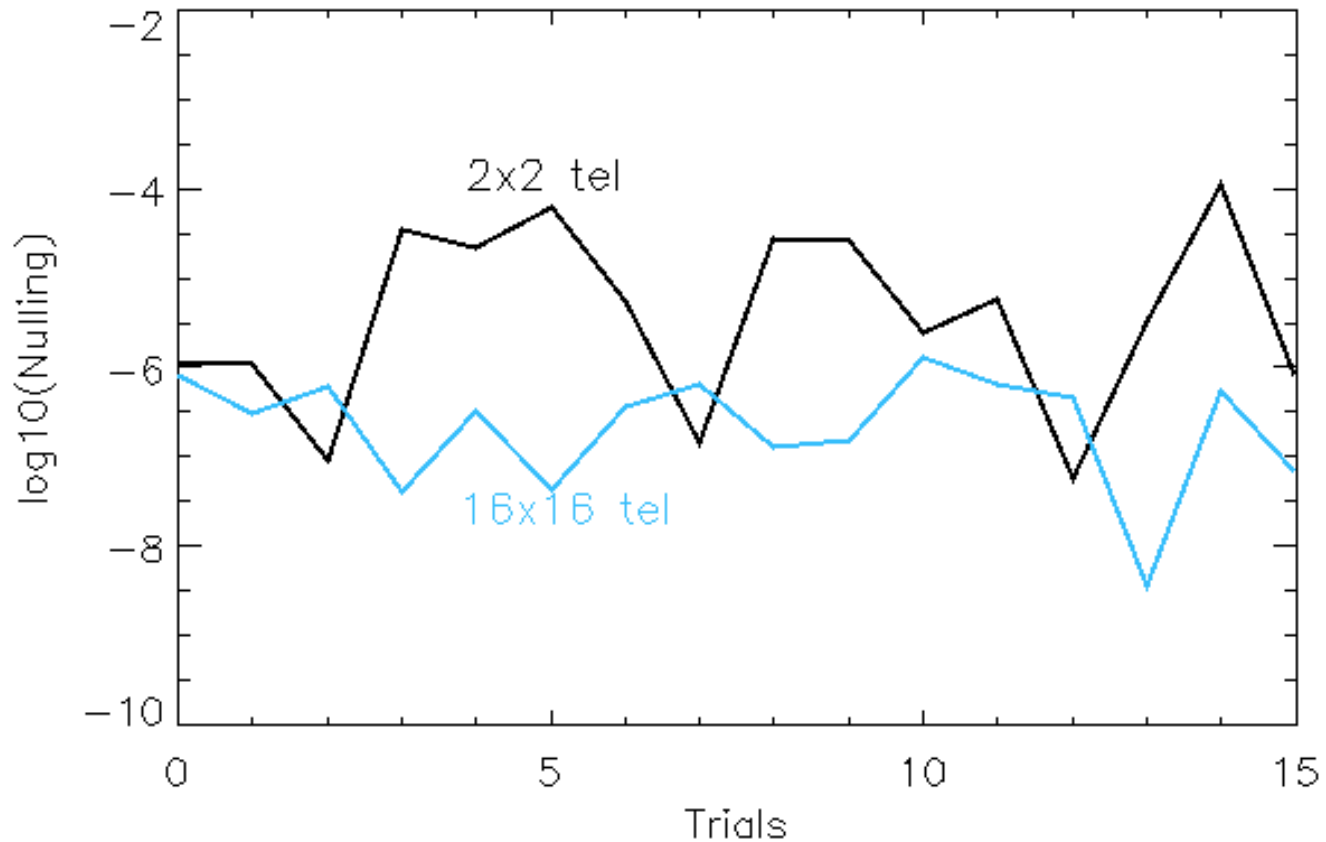
$\theta^8$



# Performances



# Stabilité d'annulation



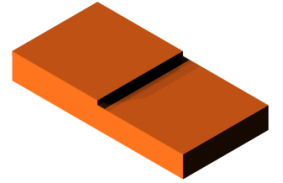
# 4- OPTIQUE DIOPHANTINNE ET DÉPHASAGE ACHROMATIQUE

---

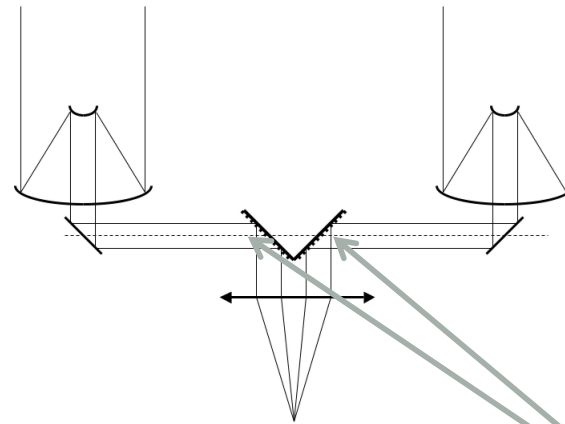
AVEC LA COMPLICITÉ DE DIDIER PELAT  
ET LE TRAVAIL DE THÈSE DE DAMIEN PICKEL

# Le damier achromatique

- Si  $\lambda = \lambda_o$ , une marche réfléchissante d'épaisseur  $e = n \lambda_o / 4$  produit un déphasage,  $\phi = \pi$  si  $n$  impair et  $\phi = 0$  si  $n$  pair

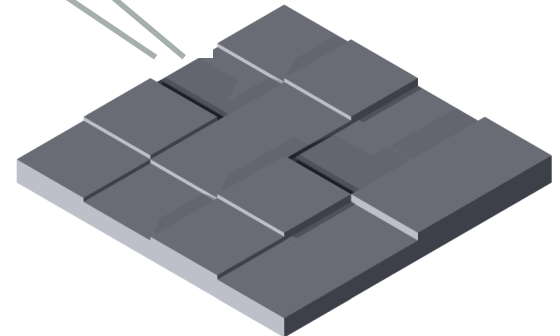


- Interféromètre de base :



- L'idée :

- Remplacer les miroirs par des damiers de cellules
  - sur une voie :  $n$  pair ( $\phi = 0$ ),
  - sur l'autre voie :  $n$  impair ( $\phi = \pi$ )



On obtient bien un interféromètre annulant pour  $\lambda = \lambda_o$

- Choisir les hauteurs des marches pour chercher à annuler l'amplitude à la recombinaison pour  $\lambda \neq \lambda_o$



# Le damier achromatique

- Amplitude en sortie d'un damier :  $a = \sum_{k=1}^N \exp(j\phi_k)$

avec :  $\phi_k = \pi n_k (1 - \delta\lambda/\lambda_0)$

- Combinaison des deux damiers :

$$a = a_+ + a_- = \sum_{k=0}^N \exp(j\pi m_k \delta\lambda/\lambda_0) - \sum_{k=0}^N \exp(j\pi n_k \delta\lambda/\lambda_0)$$

- Développement limité autour de  $\phi = \pi\delta\lambda/\lambda_0$  petit

$$a_+ = \sum_k 1 + j\phi \times \sum_k m_k - \phi^2 \times \sum_k m_k^2 - j\phi^3 \times \sum_k m_k^3 + \dots$$

$$a_- = -\sum_k 1 - j\phi \times \sum_k n_k + \phi^2 \times \sum_k n_k^2 + j\phi^3 \times \sum_k n_k^3 + \dots$$

- On annule les premiers termes si les  $n_k$  et les  $m_k$  vérifient :

$$\sum_k m_k^o = \sum_k n_k^o$$

# Le damier achromatique

- Le reste ... un jeu mathématique d'équations diophantiennes
- On retrouve le problème de Prouhet-Tarry-Escott :

$$\sum_{k=1}^N m_k = \sum_{k=1}^N n_k$$

$$\sum_{k=1}^N m_k^2 = \sum_{k=1}^N n_k^2$$

.....

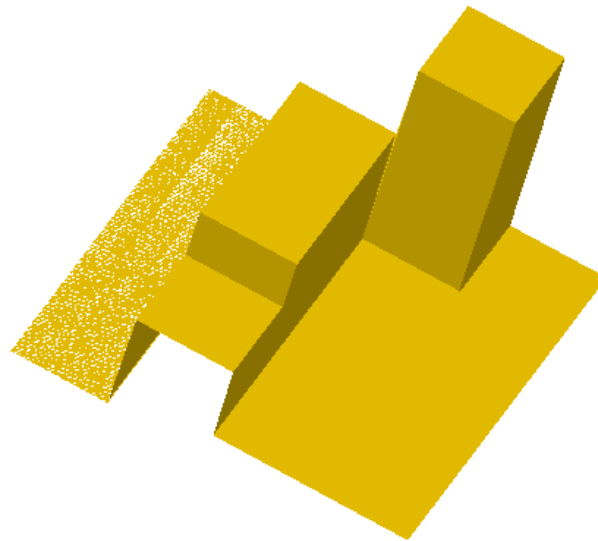
$$\sum_{k=1}^N m_k^L = \sum_{k=1}^N n_k^L$$

- Avec la condition supplémentaire :  $m_k$  pairs et  $n_k$  impairs
- Solutions = multigrades :  $\{n_k\} =^L \{m_k\}$  ;
  - Par ex :  $n_k = 1, 3, 3, 3$  et  $m_k = 2, 2, 2, 4$  ; On vérifie bien :

$$1+3+3+3 = 2+2+2+4 \quad \text{et} \quad 1^2+3^2+3^2+3^2 = 2^2+2^2+2^2+4^2$$

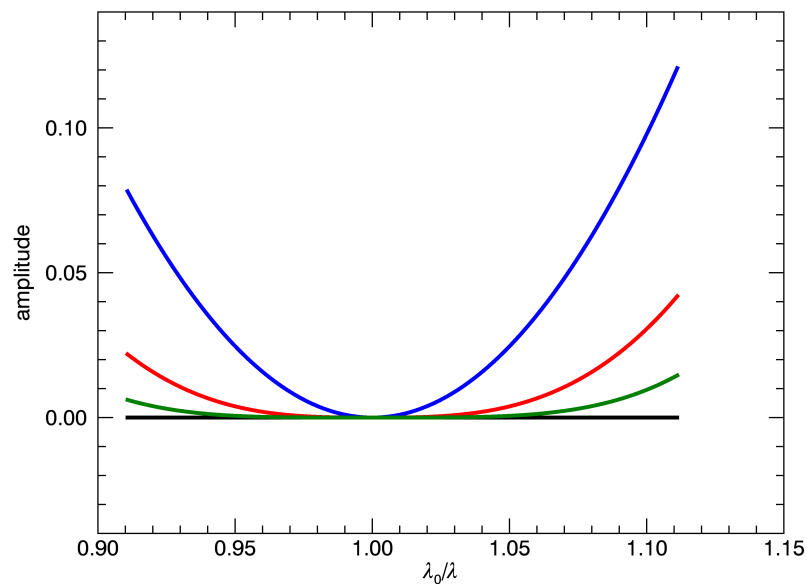
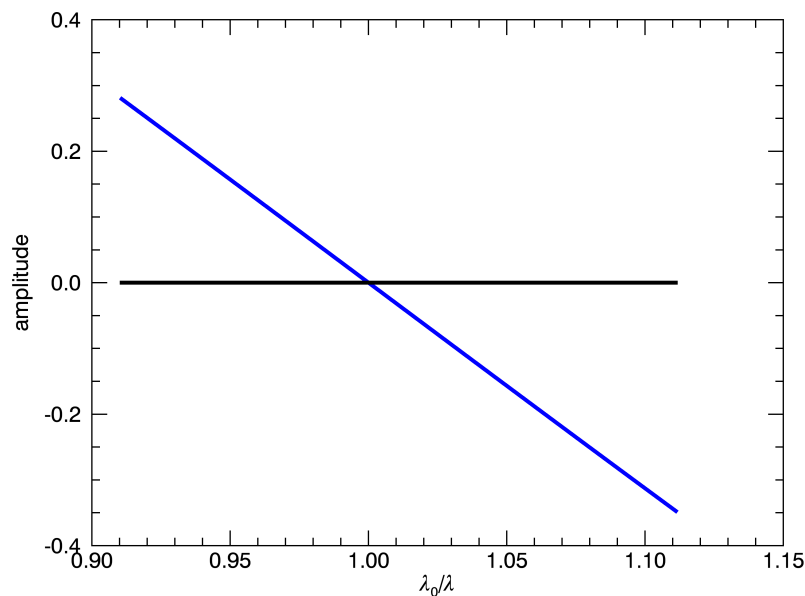
# Distribution en $z$ des marches ?

- Un nombre de solutions qui croit très vite avec l'ordre
- Parmi toutes les solutions, quels critères ?
  1. Même nombre de cellules sur chaque miroir
  2. Homogénéité de la distribution des marches :
    - Ex: solution  $\{1,1,1,1,1,1,1,9\} =^2 \{4,6,6,0,0,0,0,0\}$   
→ un *pic* sur une *mare* → pas très souhaitable



# LA distribution en $z$ des marches

- Notons  $z = (-1)^{\lambda_0/\lambda} \equiv e^{j\pi\lambda_0/\lambda}$
- Les cellules où la ddm =  $k \lambda_0/2$  donnent une amplitude complexe  $z^k$
- Pour un Bracewell élémentaire (une cellule par damier) l'amplitude est  $\Lambda = 1 + z$   
Ce qui est équivalent à :  $\lambda = \lambda_0$  est une racine d'ordre 1 de  $\Lambda$ .
- Pour un  $\Lambda$  plat autour de  $\lambda_0$  il suffit d'une racine multiple :  $\Lambda = (1 + z)^N$ 
  - Plus  $N$  est élevé plus le *nulling* autour de  $\lambda_0$  est profond



# Distribution en z des marches

- $(1 + z)^N = \text{binôme} = 1 + N z + \frac{N(N-1)}{2} z^2 + \dots + C_N^k z^k + \dots + C_N^{N-1} z^{N-1} + z^N$
- Exemple :  $(1 + z)^3 = 1 + 3z + 3z^2 + z^3 = 1 + z + z + z + z^2 + z^2 + z^2 + z^3$
- LA solution est donc une distribution des hauteurs de marche qui suit les coefficients du binôme, i.e. le triangle de Pascal :

|       |   |   |     |         |     |             |     |
|-------|---|---|-----|---------|-----|-------------|-----|
| k :   | 0 | 1 | 2   | 3       | 4   | 5           | ... |
| $N_k$ | 1 | 1 |     |         |     |             |     |
|       | 1 | 2 | 1   |         |     |             |     |
|       | 1 | 3 | 3   | 1       |     |             |     |
|       | 1 | 4 | 6   | 4       | 1   |             |     |
|       | 1 | 5 | 10  | 10      | 5   | 1           |     |
|       | 1 | N | ... | $C_N^k$ | ... | $C_N^{N-1}$ | 1   |

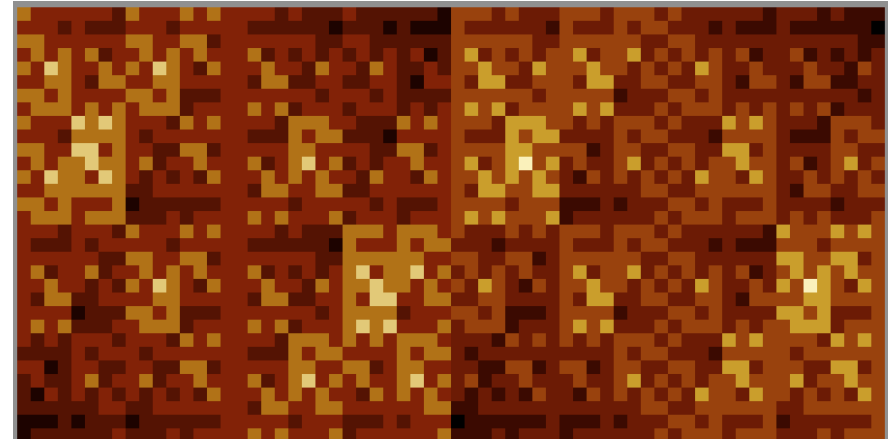
- Ex:  $\{0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 4\} =^3 = \{1, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 3\}$
- Distribution la plus homogène : pas d'écarts importants entre marches

# Distribution en $z$ des marches

Exemple :  $(1 + z)^3 = 1 + 3z + 3z^2 + z^3 = 1 + z + z + z + z^2 + z^2 + z^2 + z^3$

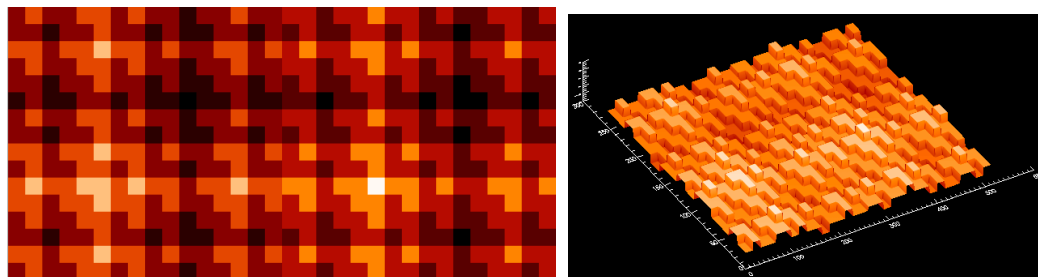
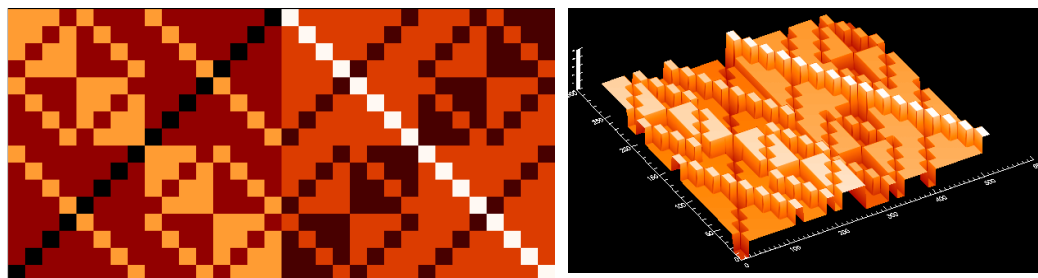
- 1 cellule de ddm 0, 3 de  $\lambda_0/2$ , 3 de  $2\lambda_0/2$  et 1 de  $3\lambda_0/2$
- Damier de 2 x 32x32 :  $(1+z)^{11}$

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 | 2 |
| 1 | 1 | 0 | 2 |



# Distribution x,y des marches

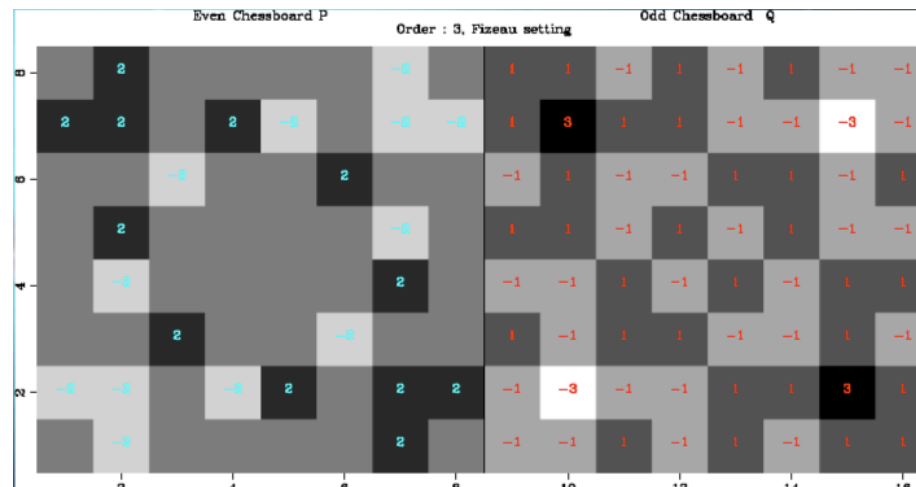
- On a défini le meilleur choix en z, mais comment distribuer les cellules en x,y ?
  1. Résidus stellaires les plus faibles près de l'axe
  2. Limiter les aberrations optiques (e.g. tip-tilt) : hauteur des marches réparties  $\pm$  uniformément
  3. Atténuation de la planète qui ne doit pas être importante
- Plusieurs distributions 2D donnent de bons résultats



# Distribution x,y des marches

- $P_r$  et  $Q_r$  = arrangement des phaseurs à l'ordre  $r$
- Les cellules sont placées de façon à ce que  $P_r - Q_r$  soit un opérateur différentiel au différences finies d'ordre élevé
- La lumière est rejetée plus efficacement hors de l'axe
- Construction par schéma itératif (Pelat, Rouan, Pickel, 2010)

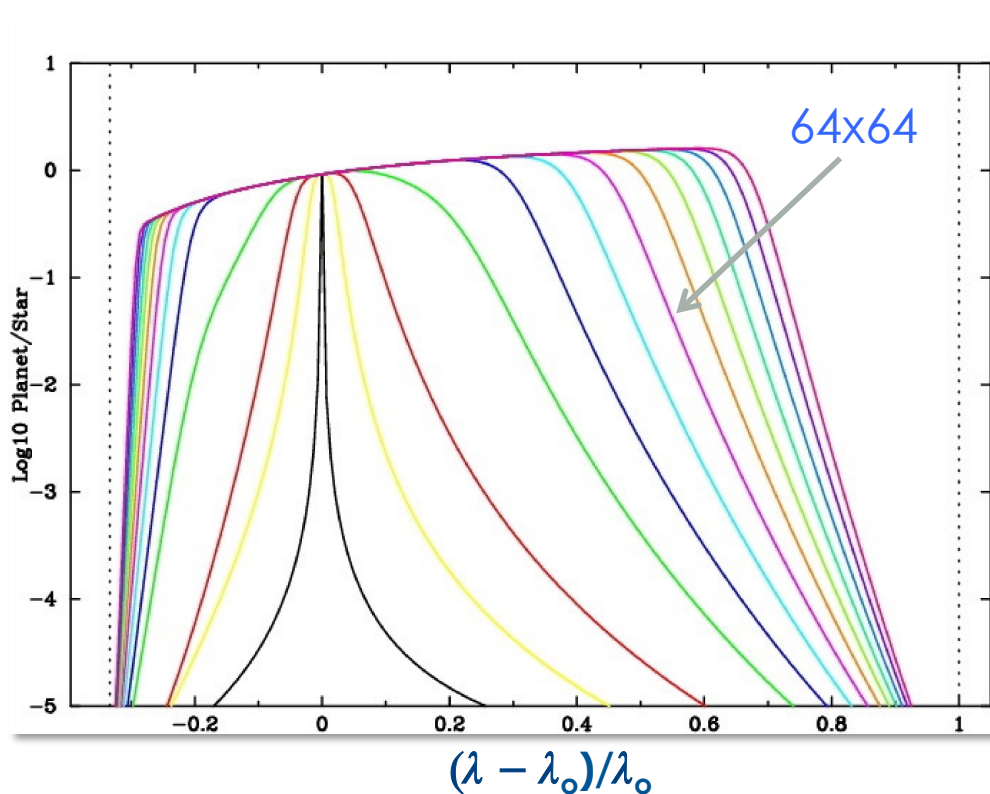
$$P_{r+1} = \begin{bmatrix} Q_r + 1 & P_n + 2 \\ P_r & Q_r + 1 \end{bmatrix}, \quad Q_{r+1} = \begin{bmatrix} P_r + 1 & Q_n + 2 \\ Q_r & P_r + 1 \end{bmatrix}$$



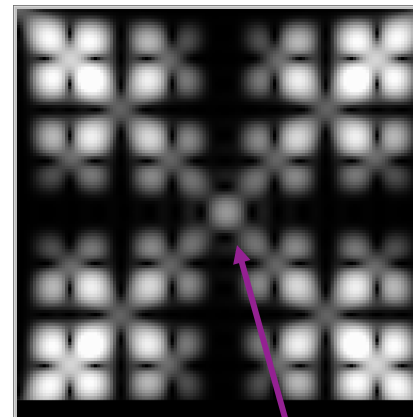
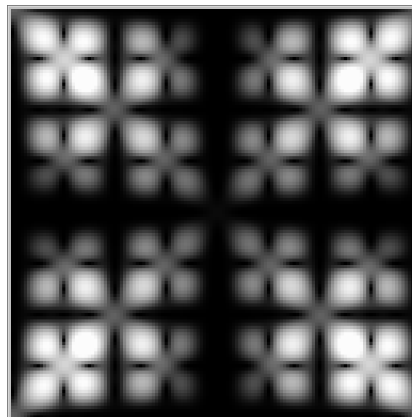


# Performance

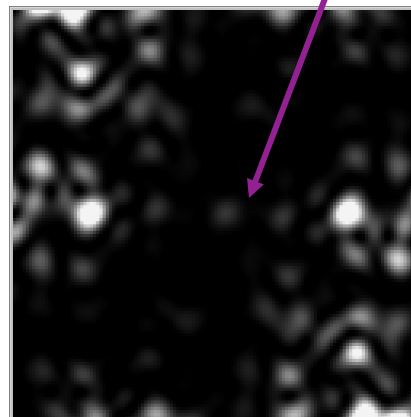
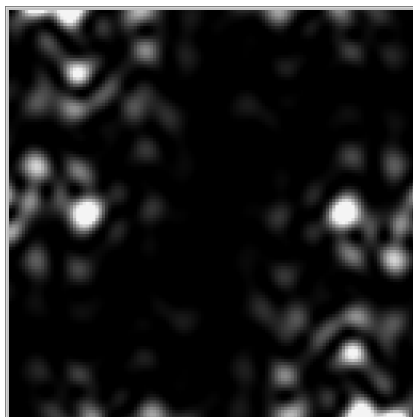
- Estimation théorique :
- bande passante max :  $\Delta\lambda/\lambda = 2/3 \lambda_o - 2\lambda_o \rightarrow$  un facteur 3 en  $\lambda$
- Si 64 x 64 cellules :  $\Delta\lambda/\lambda = (.65 \lambda_o - 1.3 \lambda_o) \rightarrow$  une octave
  - Darwin (6 – 18  $\mu\text{m}$ ) réalisable avec 2 composants



# Simulations numériques

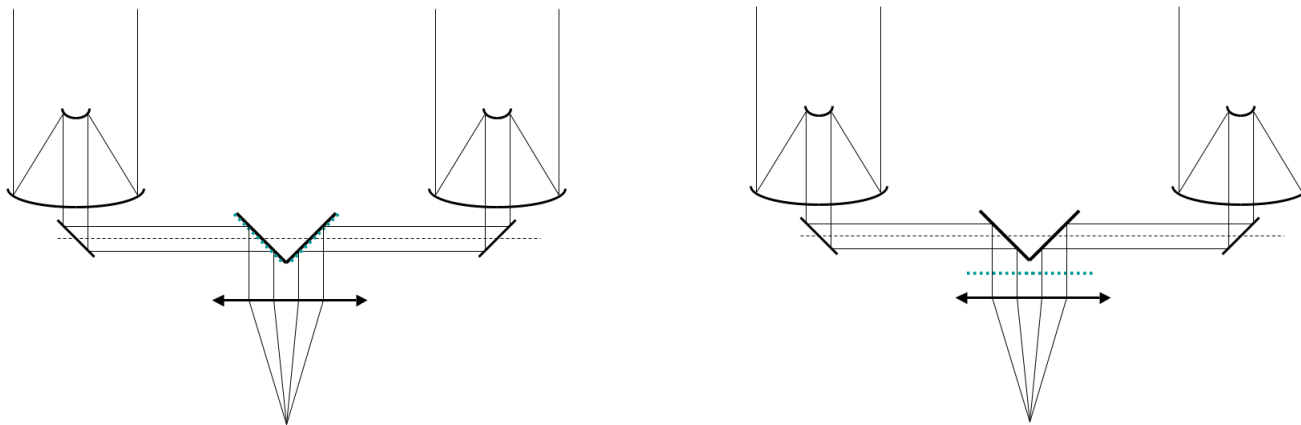


Planète  
(10<sup>-6</sup> ★)



# En pratique ?

- Avantages:
  - Symétrie complète des deux bras de l'interféromètre
  - Robustesse : un seul composant monolithique (MOEM ?)
  - Schéma optique de l'interféromètre peut être très simple

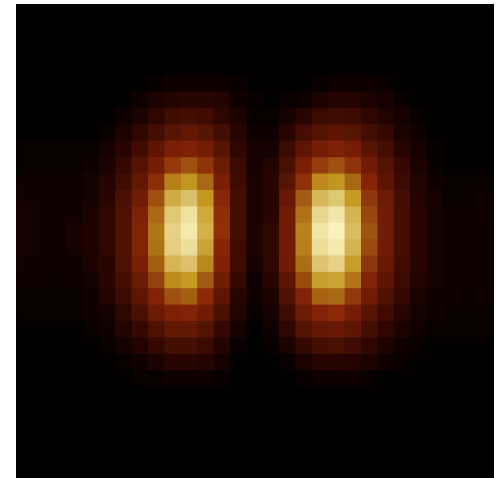
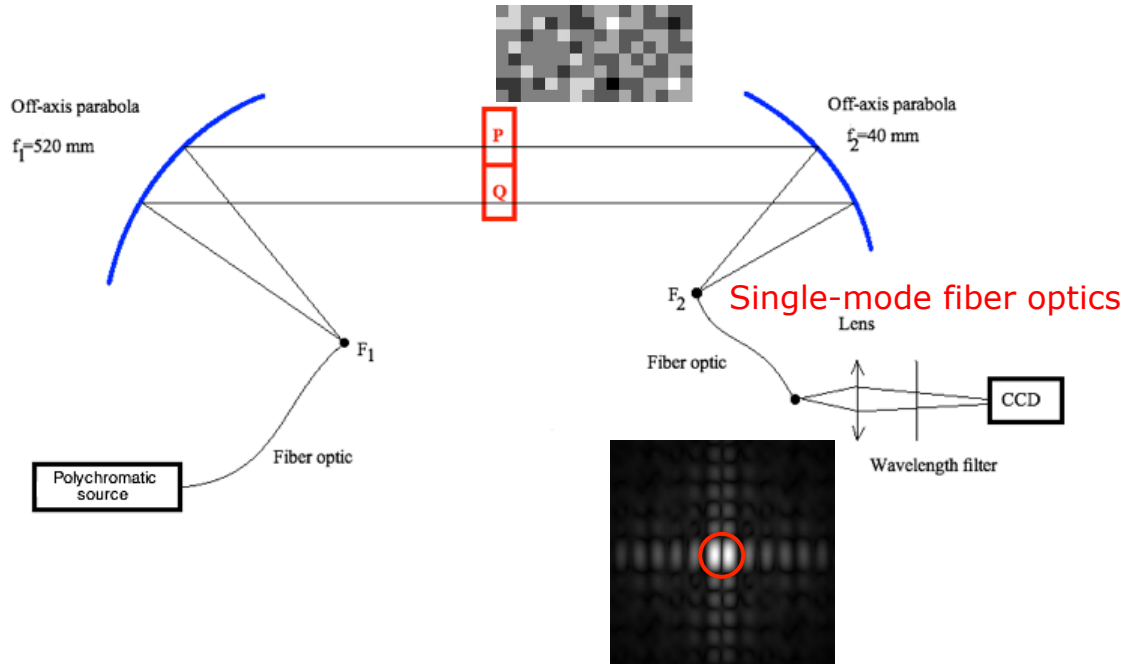


- Extension à N télescopes a priori facile ( $\phi_k = 2k\pi/N$ )
- Inconvénients :
  - Achromatisation n'est qu'approchée
  - Sensibilité aux défauts à préciser

# Le banc de test *DAMNED*

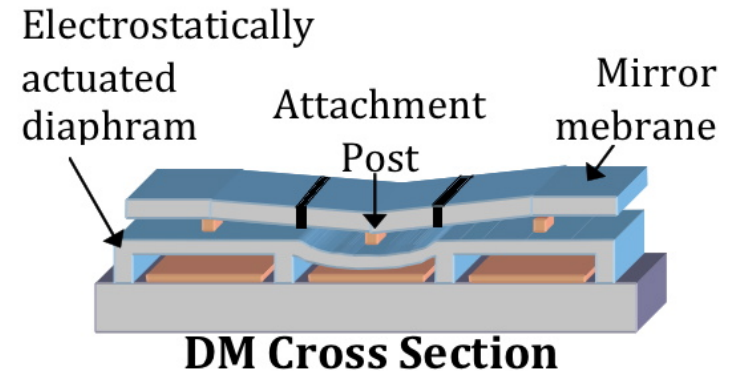
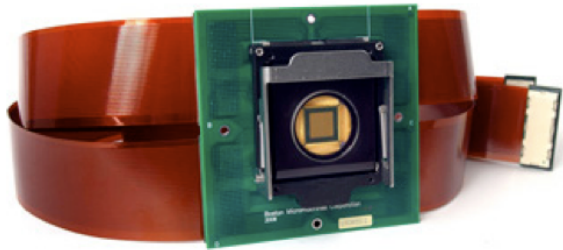
- Choix du **visible** : composants et détecteurs standards MAIS specifications beaucoup plus sévères sur les ddm
- Design simple : 2 paraboles hors-axe, un masque damier, une fibre monomode
- Simule 2 télescopes contigus en Fizeau

\* Dual Achromatic Mask Nulling Experimental Demonstrator



# Utilisation d'un MOEM

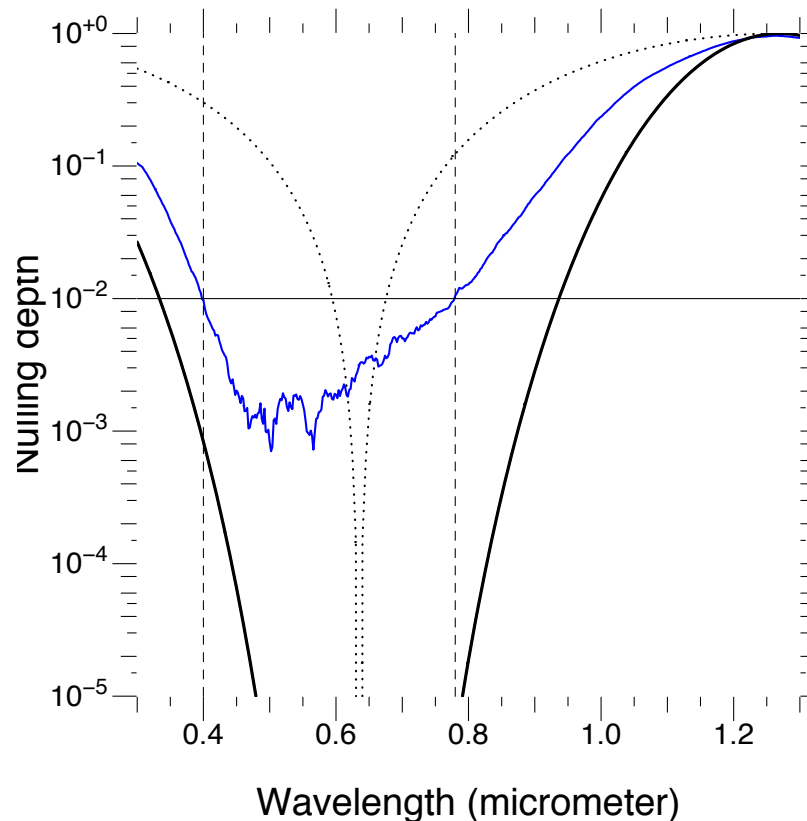
- MOEM : Micro Opto Electro Mechanism
- Composants issus des techniques de réalisation des circuits intégrés : MEMS => MOEMS



- Miroir-damier en MOEMS a plusieurs avantages :
  - Hauteur de marche ajustable : choix de  $\lambda_0$
  - Hauteur de marche contrôlable : correction des défauts
  - Dynamique : modulation de phase
  - Reconfigurable : multi-télescopes

# Performances mesurées

- Avec un damier en MOEM (12x12) modeste de  $2 \times 4 \times 4$  :
  - nulling :  $3-7 \cdot 10^{-3}$  pour des filtres large bande;
  - **Quasi-achromatisation effective**:  $8 \cdot 10^{-3}$  dans le domaine 460-840 nm
- Pickel et al. A&A 2013



La rencontre, 24 siècles plus tard, de  
**Diophante** et **d'Epicure** (*d'autres mondes  
avec des êtres vivants ... doivent exister*)  
sera-t-elle fructueuse ?  
L'avenir le dira...

---

En attendant, *think diophantian*

**MERCI POUR VOTRE  
ATTENTION !**